Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$i)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$ ii)f $(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$ iii)f(x)=$\dfrac{x+4}{x-5}$

$iv)\ f(x)=\dfrac{2x}{x^2-3x}$ v)f(x)=2x+$\dfrac{3}{x^2+5}$ vi)f(x)=$\dfrac{3}{x^3-4x}$

$vii)\ f(x)=\dfrac{2x}{x^2-2x}$ viii)f(x)=$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$

2.Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$i)\ f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ii)f $(x)=\sqrt{9-x^2}$ iii)f(x)=$\dfrac{1}{\sqrt{3x-6}}$

$iv)\ f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}$ v)f(x)=$\dfrac{1}{x-2}+\sqrt{x-1}$

$vi)\ f(x)=\sqrt{-x}$ vii)f(x)=$\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$ viii)f(x)=$\sqrt{x^2-4}-\dfrac{1}{x-1}$

$ix)\ f(x)=\dfrac{2}{|x-3|-2}$ x)f(x)=$\sqrt{3-|x|}$ xi)f(x)=$\dfrac{3}{\sqrt{2-|x|}}$

$xii)\ f(x)=\sqrt{x^2+2|x|+8}$ xiii)f(x)=$\dfrac{1}{x^2+x+1}$

3.Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$i)\ f(x)=\dfrac{1}{|x|+x}$ ii)f $(x)=\dfrac{\sqrt{3-|x|}}{|x+1|-2}$ iii)f(x)=$\dfrac{3x}{\sqrt{|3-x|}}$

$iv)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{3-|x|}}{4x}$ v)f(x)=$\dfrac{x-2}{\sqrt{x-2}}$ vi)f(x)=$\dfrac{4x}{|x|+1}$

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$i)\ f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ ii)f(x)=$\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-4}}}$

5.Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ δίνει τιμή 2

6.Αν $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & ,\text{αν } x<0 \\ 3-x & ,\text{αν } x\geq 0 \end{cases}$ να βρείτε τα f(-2), f(-1), f(0) ,f(1), f(2)

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

7.Αν $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,\text{αν } |x|<1 \\ \dfrac{1}{x^2} & ,\text{αν } |x|\geq 1 \end{cases}$ να βρείτε τα f(-2), f(-1) , f(0) ,f(1), f(2).

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x-5 & ,x\geq 0 \\ -x^2+7 & ,x<0 \end{cases}$

Α)Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
Β)Να βρείτε τις τιμές
$f(-3)$,f$\left(\dfrac{5}{2}\right)$, f(-1) , f(0) ,f$\left(\dfrac{1}{2}\right)$, f(-$\sqrt{3}$)
Γ)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$

9. Αν $f(x)=\begin{cases} 3 & ,\text{αν } x\in\mathbb{Z} \\ 2 & ,\text{αν } x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$ να βρείτε τα $f(-2), f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$,

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} ax^2-1 & ,-2<x<0 \\ \alpha x^3+\beta & ,0\leq x\leq 1 \end{cases}$

i)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
ii)Να βρείτε τα α,β ώστε f(-1)=2 και f(1)=3.

11.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} ax+\beta & ,x\leq 1 \\ \dfrac{2a-\beta}{x-1} & ,x>1 \end{cases}$

Να βρείτε τα α,β ώστε f(0)=f(2)=4

12.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=6x-3$. Να λύσετε
Α) την ανίσωση : $f(|x|)\geq 9$
Β) Να λύσετε την εξίσωση : $f(2|x-1|-2)=0$

13.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2$.Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $f(\alpha+\beta)-f(a)-f(\beta)$ για κάθε α,β$\in\mathbb{R}$.

14.Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=-3x^2+2x$
Α)Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
Β)Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, f(-1) ,f(0) , f$\left(\dfrac{2}{3}\right)$
Γ)Να υπολογίσετε την παράσταση :
$A=f(a+\beta)+f(a-\beta)-2\big(f(a)+f(\beta)\big)$

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

Δ)Να λύσετε την εξίσωση $f(x-1)+f(x)=-1$

15.Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

Α)f(0)=0

Β)f(x)+f(-x)=0 για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

16. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

Α)f(1)=0

Β) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ για κάθε $x\neq 0$

17.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-2x$.Να λύσετε

Α)την εξίσωση f(x)=0

Β) την εξίσωση f(x-1)-f(x)=1

Γ) την ανίσωση $f(2x)-8f(x)<x^2$

18.Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-16}{2x^2+8x}$

Α)ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

Β)Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

Γ)Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(4)$,$f(-4)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$

19.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5$

Α)Ποιο είναι το πεδίο ορισμού το f.

Β)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$

Γ)Να λύσετε την ανίσωση $f(x+2)+f(x)\leq 22$

20.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+a}{x^2+3x-4}$ για την οποία ισχύει f(-5)=-2.

i)Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f.

ii)Να βρείτε τον αριθμό α

iii)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{3}{2}$

iv)Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 0$

21.Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\frac{x^2-6|x|+a}{x^2-9}$

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

για την οποία ισχύει : $f(5)=\frac{1}{4}$

i)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii)Να βρείτε τον αριθμό α.
iii)Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.
iv)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.
v)Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq\frac{1}{3}$

22. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}3x+a & , x\geq -2\\ x^2+\beta x+a & , x\leq -2\end{cases}$

για την οποία ισχύει $f(-1)=-7$.

i)Να βρείτε τους αριθμούς α και β.
ii)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-8$
iii)Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{2}{f(-\sqrt{6})+f(\sqrt{6})}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή
iv) Να λύσετε την ανίσωση $x(x+1)\leq f(f(-6))$

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

23.Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(-4,-3)$ ως προς
Α) τον άξονα x'x
Β) τον άξονα y'y
Γ)την αρχή των αξόνων

24. Τα σημεία $A(\alpha^2+2\alpha, 2-2\alpha)$ και $B(\alpha+6, \alpha^2-\alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x' x
Α)Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$
Β)Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς
i) τον άξονα y'y
ii)την αρχή των αξόνων
iii) την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας.

25.Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:
i)A(1,3) B(4,7)
ii)A(-2,1) B(3,-1)
iii)A(1,5) B(1,8)
iv)A(3,6) B(-2,6)

26.Δίνονται τα σημεία A(1,2) ,B(-1,6) , Γ(3,3). Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^0$

27.Τα σημεία A(-3,3) και B(2,λ) απέχουν απόσταση (ΑΒ)=5. Να βρείτε:
Α) τον αριθμό λ
Β) σημείο Γ του αρνητικού ημιάξονα Ox' , ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ.
Γ) την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

28. Να βρεθεί ο αριθμός $x \in \mathbb{R}$ ώστε η απόσταση των σημείων A(1,2) και B(x,x) να είναι $\sqrt{5}$.

29.Να βρεθεί ο αριθμός $x \in \mathbb{R}$, ώστε η απόσταση των σημείων A(3,-2) και B(5,x) να είναι $\sqrt{20}$.

30.Αν τα σημεία A(5,3x+2) και B(-5,10-x) είναι συμμετρικά ως προς τον y'y να βρείτε το x.

31. Τα σημεία $A(\lambda^2-5, |\mu+1|)$ και $B(14-6\lambda, -|5-\mu|)$ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων . Να βρείτε:
Α)τους αριθμούς λ και μ

Β)την απόσταση (ΑΒ)
Γ)σημείο του αρνητικού ημιάξονα Oy' ,ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΑΒ.

32.Αν το σημείο Α(3,5) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να βρεθεί ο αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
$i)\, f(x) = x^2 + a$ ii)f(x)=$\sqrt{x+a}+3$

33. Σε κάθε περίπτωση να βρείτε το κ ώστε το σημείο Α να ανήκει στην αντίστοιχη συνάρτηση:
$i)\, f(x) = x + 2\kappa$ A(1,-2)
ii)f(x)=$x^2 - \kappa$ A(2,0)
iii)f(x)=3κ-κ(x-1) A(1,9)
iv)f(x)=$\frac{1}{x} + \kappa$ A(-2,-1)
$v)\, f(x) = \frac{2}{x-1} - \kappa x$ A(2,0)
vi)f(x)=κx^2 A(-2,8)

34.Έστω η $f(x) = \alpha x^3 - (a+1)x^2 - \beta x - 2$. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία Α(1,-2) και Β(-1,3) να βρείτε τα α,β και την f.

35.Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες:
$i)\, f(x) = 3x + 2$ ii)f(x)=$x^2 - 4$ iii)f(x)=$3x^2 - 6x$
$iv)\, f(x) = x^2 + 1$ v)f(x)=$x^3 + 1$ vi)f(x)=$\sqrt{x}$
$vii)\, f(x) = 1 - x^2$ viii)f(x)=$x\sqrt{x-1}$ ix)f(x)=$|x-2|\sqrt{x+2}$

36.Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες:
$i)\, f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$
$ii)\, f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+9}$
$iii)\, f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4$
i)Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f τέμνει τους άξονες
ii)Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x.

38.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}\cdot(|2x-1|-3)$.Να βρείτε:

Α) το πεδίο ορισμού της f.

Β)Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

39.Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} x^2+a & , x\le 1 \\ x^2+\beta x & , x<1 \end{cases}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(-3,5) και Β(5,10).

Α) Να βρείτε τις τιμές των α,β

Β)Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

Γ)Αν είναι $M(2,f(2))$ και $N(-1,f(-1))$ να βρείτε την απόσταση (ΜΝ).

40. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x-1}-2$ και $g(x)=x^2+\lambda x-5$ τέμνουν τον άξονα x'x στο ίδιο σημείο Να βρείτε :

Α) το πεδίο ορισμού της f.

Β)τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

Γ) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται i) πάνω από τον άξονα x'xii) κάτω από τον άξονα x'x.

41.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^2-3x+a & , x<-1 \\ |x+1|-a & , x\ge -1 \end{cases}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον y'yστο σημείο με τεταγμένη -3. Να βρείτε:

i) την τιμή του α.

ii)τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x

iii)τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη 6.

42. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-x$ και g(x)=2x-2

i)Να βρείτε τα σημεία τομής των δύο συναρτήσεων

ii)Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f βρίσκεται κάτω από την g.

43.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-3x-1$ και g(x)=2x-7.Να βρείτε :

Α)Τα κοινά σημεία των C_f και C_g

Β) Τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται :

Α)πάνω από την C_g β)κάτω από την C_g

44. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4+3$ και g(x)=$-\sqrt{2x+4}$ δεν έχουν κοινά σημεία.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)=ax+\beta$

45.Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες $y=3x+1$ και y=3x-2

46. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες $y=3x-1$ και y=$-\frac{1}{3}x+2$

47. Να βρείτε το λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες:

$i)y=(\lambda-1)x-2$ y=6x+1

$ii)y=\left(\lambda^2+5\right)x-4$ y=$\left(5\lambda-1\right)x-5$

$iii)y=\left(|\lambda|-1\right)x+4$ y=4x-1

iv)$\left(1-\lambda\right)x+y=0$ (1-λ)x+$\left(\lambda^2+1\right)y=1$

48.Να βρείτε τον λ ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες:

$i)y=\left(\lambda^2-3\right)x-1$ y=λx+7

ii)y=$\frac{1-\lambda}{3}x-6$ y=$\left(\lambda+2\right)x-9$

$iii)y=\lambda x-3$ y=λ^2x+5

49.Η ευθεία $y=\left(2\lambda-6\right)x+\lambda-1$ είναι παράλληλη στον x'x

Α)Να βρείτε τον αριθμό λ

Β)Να σχεδιάσετε την ευθεία

50.Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=|x+4|-2x$

Α)Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Β)Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$

Γ)Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωση $f(x)=a$ για τις διάφορες τιμές του α.

51. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x-1|+\lambda x+\mu$ τέμνει τον άξονα y'ψστο σημείο με τεταγμένη 5 και τον άξονα x'xστο σημείο με τετμημένη 3.

Α)Να βρείτε τους αριθμούς λ,μ

Β)Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

52.Δίνονται οι ευθείες:

$\varepsilon: y=(a+2)x+7a+4$ ζ:y=$(\beta-\alpha)x-\beta-2\alpha$.

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Μ(-3,2) και ισχύει ε//ζ. Να βρείτε:

Α)τις τιμές των α και β

Β)το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ζ με τους άξονες.

53. Η ευθεία y=λx-4 σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x'x, ενώ το τρίγωνο που σχηματίζει με τους άξονες έχει εμβδόν 4 τ.μ. Να βρείτε τον αριθμό λ.

54.Οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι τα σημεία Α(0,-3) , Β(4,0) και Γ(3,-2). Να βρείτε:

Α) το μήκος της πλευράς ΒΓ

Β)την εξίσωση της ευθείας ΒΓ

Γ)την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ

Δ)το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

55.Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$i)\ f(x)=\begin{cases}3 & ,\alpha\nu\ \ x\geq 2\\ -3 & ,\alpha\nu\ \ x\prec 2\end{cases}$ ii)$f(x)=\begin{cases}x-3 & ,\alpha\nu\ \ x\geq 1\\ 2x-4 & ,\ \alpha\nu\ \ x<1\end{cases}$

$iii)\ f(x)=\begin{cases}x-1 & ,\alpha\nu\ \ x>0\\ -x+1 & ,\alpha\nu\ \ x\leq 0\end{cases}$ iv)$f(x)=\begin{cases}3x+1 & ,\alpha\nu\ \ x\geq 0\\ -2x+1 & ,\alpha\nu\ \ x<0\end{cases}$

$v)\ f(x)=\begin{cases}x & ,\alpha\nu\ \ x\geq 1\\ 1 & ,\alpha\nu\ \ -1<x<1\\ -x & ,\alpha\nu\ \ x\leq -1\end{cases}$ vi)$f(x)=\begin{cases}2 & ,\alpha\nu\ \ x\leq -2\\ 0 & ,\alpha\nu\ \ -2<x<2\\ -2 & \alpha\nu\ \ x>2\end{cases}$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

56.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

Β)Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

Γ)Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της fμε τους άξονες x'x και y'y.

57.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α.

Β)Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$

Γ)Να αποδείξετε ότι για κάθε x ισχύει: $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$

58.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15$

Α)Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)+f(1)$

Β)Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

59.Οι διαστάσεις (σε m) του πατώματος του εργαστηρίου πληροφορικής ενός σχολείου είναι (x+1) και x , με x>0

Α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδό του πατώματος.

Β)Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι $90\ m^2$ να βρείτε τις διαστάσεις του.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x-5 & ,x\le 3\\ x^2 & ,3<x<10\end{cases}$

Α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f σε μορφή διαστήματος.

Β)Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1), f(3), f(5)$

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$

61.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί

Α)Αν η γραφική παράσταση της fδιέρχεται από τα σημεία Α(1,6) , Β(-1,4) , να βρείτε τις τιμές των α,β.

Β)Αν α=1 και β=5 , να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της fμε τους άξονες

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Β)Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(a,\frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

63.Η απόσταση y(σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α , μετά από x λεπά , δίνεται από τη σχέση :
$y=35+0,8x$
Α)Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;
Β)Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο , όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

64. α)Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3
Β)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.
Γ)Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

65.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}8-x & ,x<0\\ 2x+5 & ,x\geq 0\end{cases}$
Α)Να δείξετε ότι $f(-5)=f(4)$
Β)Να βρείτε τις τιμές του x ώστε $f(x)=9$

66.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}$
Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης fκαι να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x)=x^2+4x$
Β) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$

67. α)Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση : $A=x^3-x^2+3x-3$
Β)Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το Α(1,3).

68. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$
Α)Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συνάρτησεων των f,gσε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.
Β) Αν Ο,Α,Β είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων , όπου Ο(0,0) , να αποδείξετε ότι τα Α,Β είναι συμμετρικά ως προς Ο.

69. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{2x^2-4x+\mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της gδιέρχεται από το σημείο Α(1,-4)

Α)Να δείξετε ότι μ=-6

Β)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

Γ)για μ=-6 να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης

70.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

Β)Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.

Γ)Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες x'x , y'y , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α , Β.

71.Δύο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλεια. Τους άρεσε ν ζωγραφίσουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ και τα έσοδα από την πώληση τους (σε ευρώ) σε διάστημα ενός μηνός , από τη συνάρτηση $E(x)=15,5x$

Α)Ποια είναι τα πάγια έξοδα της επιχείρησης

Β)Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και τα έξοδα

Γ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος;Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

72.Για την κάλυψη , με τετράγωνα πλακάκια , μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά dcmή πλακάκια τύπου Β με πλευρά (d+1) cm.

Α)Να βρείτε , ως συνάρτηση του d ,το εμβαδό που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

Β)Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφτεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 πλακάκια τύπου Β, να βρείτε:

i)τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου

ii)το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

73. Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω , αφού διαγράψει μια τροχιά , μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h(σε cm) από το έδαφος , στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνηση της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση : $h(t)=-5t^2+10t+1,05$

Α) Να βρείτε τις τιμές $h(0),h(1),h(2)$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.

Β)Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος.

Γ)Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο: $h(t)=5\left[1,21-(t-1)^2\right]$

Δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1($\sigma\varepsilon$ sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05 m.

74. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το R.

Α) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης τηςgμε τον άξονα x'x.

Β)να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία (3,0) ή (-3,0)

Γ)Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του x'x που η τετμημένη του να ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=g(x)$

Δ) να βρείτε συνάρτηση hπου η γραφική της παράσταση να είναι ευθεία και να τέμνει τη γραφική παράσταση της gσε σημείο του άξονα x΄x.

75.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$

Α)να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

Β)Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)=|x|-2$

Γ)Για $x\in\mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $\left(f(x)+2\right)^2-4f(x)-5=0$

76.Δίνονται οι συναρτήσεις :

$f(x)=x^2-4x+a$ και $g(x)=ax-5$,$\alpha\in\mathbb{R}$

Α)ν ισχύει $f(2)=g(2)$ να βρείτε την τιμή του α.

Β)Για =1

i)να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=g(x)$

ii)να λύσετε την ανίσωση $f(x)\geq g(x)$ και με τη βοήθεια αυτής , να λύσετε την εξίσωση : $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$

77.Για δεδομένο $\lambda\in\mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda+1)x+2$, $x\in\mathbb{R}$

Α)Να δείξετε ότι , για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της fδιέρχεται από το σημείο Α(0,2)

Β)Για λ=-1 , να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Γ)Αν η γραφική παράσταση της fτέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Β(2,0) , να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x'xκαι σε άλλο σημείο.

Δ) Για λ=1 , να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x'x.

78. Δίνονται οι συναρτήσεις fκαι gμε $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$

Α)να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων fκαι g.

Β)να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική πράσταση της fείναι κάτω από εκείνη της g.

Γ)να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής y=α , α<-1 , βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

79. Δίνεται η εξίσωση : $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

Α)Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Β)Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει δυο ρίζες ίσες;

Γ) να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το R.

80.Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$

Α) Να βρείτε τις τιμές των κ,λ

Β)Για κ=1 και λ=-2:
i)να απλοποιήσετε τον τύπο της g.
ii)Να δείξετε ότι : $g(a+3)>g(a)$, όταν -1<α<2

81. Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώνει x κυβικά νερού το χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}12+0,5x & ,0\le x\le 30\\ 0,7x+6 & ,x>30\end{cases}$$

Α)Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:
i)έλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει νερό.
ii)έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού
iii)έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.
Β)Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση xκυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:
$g(x)=12+0,6x \quad ,x\ge 0$
Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού , για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης Β , να αποδείξετε ότι καθένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερο από 60 κυβικά μέτρα νερού.

82.Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μια μέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο : $y=60+0,2x$, όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και υτο ποσό της χρέωσης σε ευρώ.
Α)Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μια μέρα ταξίδεψε 400 km.
Β)Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος , για μια ημέρα , πλήρωσε 150 ευρώ.
Γ)Μια άλλη εταιρεία Β , χρεώνει τους πελάτες ανα ημέρα σύμφωνα με τον τύπο y=80+0,10x , όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και υτο ποσό της χρέωσης σε ευρώ.Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.
Δ)Αν $f(x)=60+0,20x$ και $g(x)=80+0,10x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα , να βρείτε τις συντεταγμένες του

σημείου τομής των γραφικών τους παραστάσεων και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

83.Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=(x-1)^2-4$ και $g(x)=|x-1|+2$

Α)Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφικήπαράσταση της συνάρτησης fβρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

Β)Να δείξετε ότι , για κάθε τιμή του x , η γραφική παράσταση της συνάρτησης gβρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

Γ)Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , g.

84.Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ$\left(\hat{A}=90^0\right)$ με κάθετρς πλευρές που έχουν μήκη x,yτέτοια ώστε x+y=10.

Α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$E(x)=\frac{1}{2}\left(-x^2+10x\right)$, $x\in(0,10)$

Β) Να αποδείξετε ότι $E(x)\le\frac{25}{2}$ για κάθε $x\in(0,10)$

Γ)Για ποια τιμή του $x\in(0,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο , δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε για το τρίγωνο ΑΒΓ;

85.Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40cm$. Αν x cmείναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:

Α) Να αποδείξετε ότι 0<x<20.

Β))Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(x) του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση : $E(x)=20x-x^2$.

Γ)Να αποδείξετε ότι $E(x)\le100$ για κάθε $x\in(0,20)$

Δ)να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό είναι το τετράγωνο με πλευρά 10 cm.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x)=ax^2$

86. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$i)\ f(x)=x^2$ g(x)=x^2+1 h(x)=$(x+1)^2$

$ii)\ f(x)=|x|$ g(x)=$|x|+3$ h(x)=$|x+3|$

$iii)\ f(x)=|x|$ g(x)=$|x|-3$ h(x)=$|x-3|$

$iv)\ f(x)=|x|$ g(x)=$|x+3|-2$ h(x)=$|x-3|+1$

87.Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

$i)\ f(x)=2x+1$ ii)f(x)=-3x+1 iii) f(x)=$\sqrt{x}$

$iv)\ f(x)=3-\sqrt{x-1}$ v)f(x)=2+$\sqrt{1-x}$

88.Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

$i)\ f(x)=x^2+1$ ii)f(x)=$|x|+1$ iii)f(x)=$|x-2|$

$iv)\ f(x)=-x^2-1$ v)f(x)=-$|x|-1$ vi)f(x)=$\frac{1}{x^2+5}$

$vii)\ f(x)=\frac{-1}{x^2+1}$ viii)f(x)=$\frac{4}{|x|+1}$

89.Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.

$i)\ f(x)=x^2$ ii)f(x)=x^3 iii)f(x)=x^4+1

$iv)\ f(x)=x^2-1$ v)f(x)=x^3-2 vi)f(x)=$\frac{1}{x}$

$vii)\ f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+5}$ viii)f(x)=$\frac{x}{x^2-2}$ ix)f(x)=$\frac{x^2}{x^3+1}$

$x)\ f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$ xi)f(x)=$\frac{x}{x^2+1}$ xii)f(x)=$\frac{3}{2-x}$

$xiii)\ f(x)=\frac{3x}{x^2+2x}$ xiv)f(x)=$\sqrt{3-x^2}$ xv)f(x)=$\sqrt{x^2+5}$

$xvi)\ f(x)=x\sqrt{x^2+3}$ xvii)f(x)=$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ xviii)f(x)=$\frac{-x\sqrt{x^2+1}}{|x|}$

90.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x^2-1}$

Α)Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

Β) Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y'y

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

Γ)Να βρεθούν τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x'x

Δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(2,-2) και Β(-2,3)

Ε) Να απλοποιηθεί ο τύπος της f.

91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^4+ax^2}{x^2-4}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(-1,1).

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fκαι την τιμή του α.

Β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ