Άσκηση 1

Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A=|2x-4|-x-3$

Λύση:

Θεωρούμε την παράσταση $2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $x\in(-\infty,2]$

  Τότε $x\le 2 \Leftrightarrow 2x\le 4 \Leftrightarrow 2x-4\le 0 \Leftrightarrow |2x-4|=-(2x-4)=4-2x$

  Επομένως

  $A=|2x-4|-x-3=4-2x-x-3=-3x+1$

- $x\in(2,+\infty)$

  Τότε $x\succ 2 \Leftrightarrow 2x\succ 4 \Leftrightarrow 2x-4>0 \Leftrightarrow |2x-4|=2x-4$

  Επομένως

  $A=|2x-4|-x-3=2x-4-x-3=x-7$

Άρα $A=\begin{cases}-3x+1 & ,x\le 2\\ x-7 & ,x>2\end{cases}$

Άσκηση 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=|3x-9|-|2-x|$

Λύση

Θεωρούμε τις παραστάσεις :

$3x-9=0 \Rightarrow x=3$

$2-x=0 \Rightarrow x=2$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $x\in(-\infty,2]$

  Τότε $3x-9\le 0 \Rightarrow |3x-9|=-(3x-9)=9-3x$

  $2-x\ge 0 \Rightarrow |2-x|=2-x$

  Επομένως

  $A=|3x-9|-|2-x|=(9-3x)-(2-x)=9-3x-2+x=-2x+7$

- $x\in(2,3]$

  Τότε $3x-9\le 0 \Rightarrow |3x-9|=-(3x-9)=9-3x$

  $2-x\le 0 \Rightarrow |2-x|=-(2-x)=x-2$

  Επομένως

  $A=|3x-9|-|2-x|=(9-3x)-(x-2)=9-3x-x+2=-4x+11$

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

$x \in (3, +\infty)$

Τότε $3x-9 \geq 0 \Rightarrow |3x-9| = 3x-9$

- $2-x \leq 0 \Rightarrow |2-x| = -(2-x) = x-2$

Επομένως

$A = |3x-9| - |2-x| = (3x-9) - (x-2) = 3x-9-x-2 = 2x-11$

Άρα $A = \begin{cases} -2x+7 & ,x \leq 2 \\ -4x+11 & ,2 \leq x < 3 \\ 2x-11 & ,x > 3 \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$i) A = |\sqrt{6}+3| + |\sqrt{5}-3| - |1-\sqrt{6}| + |2-\sqrt{5}|$

$ii) B = |1-\sqrt{2}| - |5+\sqrt{2}| + |-x^2-2| - |x^2+4|$

$iii) \Gamma = |5-\pi| + |\sqrt{8}+\pi| - |-\sqrt{8}-3|$

2.Αν α<2<β , να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$i) A = |a-2| - |2-\beta|$ ii)$B = |a-2| + |\beta-2|$ iii)$\Gamma = |\beta-\alpha| - 2|\alpha-\beta|$

3.Αν 0<x<2 , να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A = |x+1| + |x+2| + 2|x-2|$ $B = |x-2| + |2x-5| + |3x|$

4. Να γράψετε χωρίς απόλυτη τιμή τις παραστάσεις:

$a) A = |x-2| + |x-5|$, 2<x<5

$\beta) B = |\alpha-\beta| + |\alpha-2| + |2-\beta|$, 2<α<β

$\gamma) \Gamma = |x^2+4| + |x^6+2| - |x^2+x^6+10|$

$\delta) \Delta = |\alpha-\beta| + |\beta-\gamma| + |\alpha+\beta-2\gamma|$ α<β<γ

5. Αν γνωρίζουμε ότι $-4 < x < -1$ να αποδείξετε ότι η παράσταση

$A = |2x-3| - |1-3x| + |-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

6. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

$A=|x^2-6x+9|$ Β=$|-x^2+8x-16|$ Γ=$|(x-2)(x+2)+6|$

7. Αν α<β<γ τότε να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$A=2|\alpha-\beta|-3|\gamma-\beta|+4|\gamma-\alpha|$$

8. Αν $a<2<\beta$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A=|a-\beta|+|\beta+2|-4$
$B=|\alpha-\beta|+|\beta-2|+2+\alpha$

9. Αν $3<a<\beta<\gamma$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A=|3-\alpha|+|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|-|\gamma-3|$
$B=|1-\alpha|+|1-\beta|+|1-\gamma|-|\alpha+\beta+\gamma-3|$
$\Gamma=|\alpha+\beta-3|-|\beta+\gamma-1|+|\alpha+\beta+\gamma-3|$
$\Delta=|\alpha-\beta|+|\gamma-\alpha+1|-|2\alpha-\beta-\gamma|$

10. Να απλοποιήσετε την παράσταση :

$a)A=|x|\left|x+2+\frac{1}{x}\right|$ με $x\neq 0$

$\beta)B=\left|\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right|$, $\alpha\neq\beta$

11.Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A=|x^2+1|-|-x^2-4|$
$B=|x^2+4x+4|-|6x-x^2-9|$
$\Gamma=|(x-1)(x+1)+3|-|x^2-10x+25|$

12. Αν $|x|<1$, γράψτε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$A=2|x+3|-6|x-2|+x-1$$

13. . Αν $|x|<1$, γράψτε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$A=2|x+3|-3|x-4|-2x+1$$

14.Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση :

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

$A=|x+2|+|x-2|$ όταν : i)x<-2 ii)-2<x<2 iii)x>2

15.Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$i)A=\dfrac{x^4+2|x^5|}{2|x|+1}$ ii)B=$\dfrac{x^2+2|x|}{|x|+2}$ iii)Γ=$\dfrac{|x|^3+3x^2}{2|x|+6}$

$iv)\Delta=\dfrac{x^2+4|x|+4}{|x|+2}$ v)E=$\dfrac{x^2-1}{|x|+1}$ vi)ΣΤ=$\left|\dfrac{x-1}{1-x}\right|+\left|\dfrac{2x+2}{-x-1}\right|+\left|\dfrac{x^2-1}{1-x^2}\right|, x\neq -1, x\neq 1$

16.Να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$\frac{x^2+2|x|}{x^2-4}+2\frac{2-|x|}{x^2-4|x|+4}$$

17. Να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$A=\frac{|a+1|}{|-1-a|}+\frac{|a^2-2|}{|2-a^2|}+\frac{|a^3-\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma|}{|3\alpha\beta\gamma-\gamma^3+\beta^3-\alpha^3|}$$

18.Να γράψετε τις παραστάσεις χωρίς την απόλυτη τιμή:

$A=|x-1|+2x-5$

$B=|6-2x|-x+1$

19.Να γράψετε τις παραστάσεις χωρίς τις απόλυτες τιμές;

$A=|x-1|-3|2-x|+x$

$B=|3x+3|-2|2-x|+3x-2$

20. Αν α<1<β να αποδείξετε ότι: $|\alpha-2|+|\beta|-|\alpha-\beta|=2$

21. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

$A=2|x-5|-4x+10$

$B=-|x-3|+4|3-x|$

$\Gamma=3|1-x|-|x-1|+3-2x$

22.Αν x<1 να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$A=|x-4|-2|x-1|+2|3-x|$

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

23. Αν x<2 να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές την παράσταση:
$A=|x-2|-3|4-x|+|x-5|$

24.Έστω $3<a<6$ και $A=3|a-2|-4|a-8|+5|3+a|+6|a-7|-15$

Να αποδείξετε ότι :

$a)A=6a+4$ β)22<A<40

25. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$a)A=|x^2+1|+|1+|x||-|x^2+|x||+|1+2x+x^2|-|-3-x^2|$
$\beta)B=|\alpha-\beta|+|\beta-\delta|-|\alpha-\delta|+|\alpha-\beta+\gamma-\delta|+\alpha+\gamma$
όταν α<β<γ<δ και β+δ=2018

26. Αν ισχύει: $-2<x<3$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$a)A=|x+2|-|x-3|$
$\beta)B=|3-x|-|x+2|+|x-4|$
$\gamma)\Gamma=|5-|x-3||$
$\delta)\Delta=||x+2|-5-|2x-6||$

27. Αν γνωρίζουμε ότι $-2<x<3$ να απλοποιήσετε την παράσταση :

28.Αν ισχύει $-2<x<3$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$\alpha)A=|5-|x-3||$
$\beta)B=||x+2|-5-|2x-6||$

29. Δίνεται η παράσταση : $A=|x-2|-|4-2x|+x$

Α)Να αποδείξετε ότι : $A=x-|x-2|$

Β)Να γράψετε την παράσταση Α χωρίς απόλυτες τιμές.

Γ)Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x , ώστε : A=0.

30. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $B=|x-5|-|10-2x|+3$

31. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

$\alpha)\mathrm{A}=|3x-6|-|4-2x|-|2-x|$

$\beta)\mathrm{B}=|a-\beta+3|+|\beta-\alpha-3|-|2\beta-2\alpha-6|$

32. Να γράψετε την παράσταση χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής $\mathrm{A}=|x-|x||+|x+|x||$

33. Αν $x\neq 0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{A}=\left(1+\frac{|x|}{x}\right)\left(x-|x|\right)$ είναι ανεξάρτητη του x.

35. Να δείξετε ότι: $|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)$

36. Να δείξετε ότι: $|\alpha+\beta|^2-|\alpha-\beta|^2=4\alpha\beta$

37. Να αποδείξετε ότι:

$i)|a+1|^2-4a=|a-1|^2$ ii)$\left(|a|-|\beta|\right)^2+2|\alpha\beta|=\alpha^2+\beta^2$

$iii)a^2-\left(|a|-|\beta|\right)\left(|\alpha|+|\beta|\right)=\beta^2$

38. Να αποδείξετε ότι : $|x-2y|^2+|2x+y|^2=5\left(|x|^2+|y|^2\right)$, $x,y\in\mathbb{R}$

39. Να βρείτε τους αριθμούς α και β , αν ισχύει :

$|a-2|+|a+\beta-5|=0$

40. Να βρείτε τους αριθμούς x ,y στις παρακάτω περιπτώσεις :

$a)|x-1|+|y-2|=0$

$\beta)|x^2-4|+|x-2|=0$

$\gamma)|y^2-4y+3|+|y^2-1|=0$

$\delta)|x^2-16|+|x^2-9|=0$

$\varepsilon)|x-2|+|2y-x-2|=0$

$\sigma\tau)|x-2y|+3|x-1|=|2-2x|$

$\zeta)|x+3y|+|4y-8|=|6-3y|$

$\eta)|x+y-3|+|3x-2y+1|=0$

41. Αν ισχύει $|2x-y|+|2x-6|=|3-x|$ να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , y.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

42. Αν ισχύει $|4a-5\beta|+|2\alpha-\beta|=|4\alpha-2\beta|$ να αποδείξετε ότι α=β ή α=2β.

43. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύουν :

$a)|a-3\beta|+|3\beta-6|-|2\beta-4|=0$
$\beta)|2\alpha+\beta-5|+|3\alpha+2\beta-6|=0$

44. Να βρείτε τον αριθμό x για τον οποίο ισχύει :

$a)|x^2-9|+|x^2+3x|=0$
$\beta)|x^3-4x|+|x^3-2x^2-9x+18|=0$

45.Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει : $|\beta-3\alpha|+|3\alpha-3|=|2-2\alpha|$. Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

46.Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει : $|x-3y|+|3y-6|-|2y-4|=0$. Να βρείτε τους αριθμούς x και y.

47.Δίνονται οι αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει ότι:

$$|\alpha-2|+|\alpha+2\beta-8|=0$$

Α)Να βρείτε τους αριθμούς α και β

Β)Αν ισχύει α<x<β , να απλοποιήσετε την παράσταση : $A=|x-2|-|x-3|+|2x-7|$

48.Δίνονται οι αριθμοί $K=|x|+1$ και Λ=x+1 , όπου x πραγματικός αριθμός.

i)Να αποδείξετε ότι : $K\geq\Lambda$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ii)Να αποδείξετε ότι : $|\Lambda^2-2x|-|K^2-x^2-1|=(K-2)^2$.

iii)Αν $2<x<5$, να δείξετε ότι : $|\Lambda-3|+|6-\Lambda|=3$.

iv)Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση : $M=|K|+\Lambda$.

49. Αν $|x|\leq 2$ και $|y|\leq 3$, να αποδείξετε ότι :

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

$a)|x+y|\le 5$ β)$|x-y|\le 5$

$\gamma)|2x+3y|\le 13$ δ)$|3x-2y|\le 12$

$\varepsilon)|x+2y+4|\le 12$ στ)$|x^2-3y^2+1|\le 32$

50.Αν $x\in\mathbb{R}$ και $|x|\le 1$, να αποδείξετε ότι :

$a)|7x^3-4x^2+3|\le 14$

$\beta)|3x^3+2x^2-8|\le 13$

51. Να αποδείξετε ότι :

$a)\alpha\nu$ $|\alpha-\beta|<2$ και $|\gamma-\beta|<5.$ τότε $|\alpha-\gamma|<7$

$\beta)\alpha\nu$ $|x-y|\le\frac{1}{2}$ και $|x-z|\le\frac{1}{2}$, τότε $|y-z|\le 1$

52. Να αποδείξετε ότι $|x+y|\le|x+2|+|y-2|$

53.Αν $x\ne y$ να αποδείξετε ότι $|x-y|+\frac{1}{|x-y|}\ge 2$

54.Αν $x,y\ne 0$, να αποδείξετε ότι : $\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y}{x}\right|\ge 2$

55.Αν ισχύει x<y<z<0 να απλοποιηθεί η παράσταση :

$i)\mathrm{A}=-2|x-y|+|y-x|+4|y-z|+3|x-z|$

$ii)B=|x+y|-|y+z|-|x+z|$

$iii)\Gamma=|x-y|+|y-z|-|z-x|$

$iv)\big||y-x|+|y|-|z|\big|$

56. Αν $|x|\le 2$ και $|y|\le 3$, να αποδείξετε ότι :

$\alpha)|x+y|\le 5$ β)$|x-y|\le 5$

$\gamma)|3x+y|\le 9$ δ)$|2x-3y|\le 13$

$\varepsilon)|x-2y+3|\le 11$ στ)$\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+5\right|\le 7$

57. Να αποδείξετε ότι :

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

$\alpha)\alpha\nu \quad |\alpha-1|<3$ και $|\beta+1|<5$, τότε : $|\alpha+\beta|<8$

$\beta)\alpha\nu \quad |\alpha-\beta|<3$ και $|\beta-\gamma|<2$, τότε : $|\alpha-\gamma|<5$

$\gamma)\alpha\nu \quad |3-\alpha|<4$ και $|3-\beta|<2$, τότε $|\alpha-\beta|<6$

58. Να αποδείξετε ότι : $|x+y|\le|x+2|+|y-2|$

59. Να αποδείξετε ότι :

$\alpha)|\alpha+\beta|\le|\alpha-\gamma|+|\gamma+\beta|$

$\beta)|2\alpha-3\beta|\le|\alpha-5\beta|+|\alpha+2\beta|$

$\gamma)|\alpha-\beta|\le|2\alpha+5\beta|+|3\alpha-7\beta|+|\beta-4\alpha|$

60. Αν ισχύει $|x|\le1$ και $|y|\le2$ να αποδείξετε ότι :

$\alpha)|7x-2y|\le11$ και $\beta)|1-3x+4y|\le12$

61. Αν $\dfrac{|2a+3\beta|}{|3\alpha+2\beta|}\le1$ να αποδείξετε ότι: $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|\le1$

62. Αν $\left|\dfrac{a+2\beta}{\beta+2\alpha}\right|\le1$, να αποδειχθεί ότι $|\beta|\le|\alpha|$ και αντιστρόφως.

63. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\left|\dfrac{4\alpha}{4\alpha^2+1}\right|\le1$

64. Να αποδείξετε ότι : $|\alpha\beta|-\alpha\beta\ge\alpha|\beta|-\beta|\alpha|$

65. Αν ισχύει $|3\alpha+2\beta|=|3\alpha|+|2\beta|$, όπου $\alpha,\beta\ne0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι.

66. Αν ισχύει $|3\alpha-2\beta|=|3\alpha|+|2\beta|$, όπου $\alpha,\beta\ne0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι.

67. Αν $x|y|+y|x|=0$ $xy\ne0$ να δείξετε ότι οι x,y είναι ετερόσημοι.

68. Αν ισχύει $\dfrac{|x|}{y}-\dfrac{x}{|y|}=0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x και y είναι ομόσημοι.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

69.Έστω οι αριθμοί $\alpha,\beta\neq 0$ για τους οποίους ισχύει ότι $|\alpha+\beta|<|\alpha-\beta|$.
Να αποδείξετε ότι :

α)οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι

β)ισχύει $\alpha|\beta|+\beta|\alpha|=0$.

70. Αν $x,y\in\mathbb{R}$ με $x\neq y\neq 0$ και $\dfrac{|x|y|+y|x||}{|xy|}=2$ τότε να δείξετε ότι οι αριθμοί x,y είναι ομόσημοι.

71.Για τους αριθμούς $x,y\neq 0$ ισχύει ότι : $\left|\dfrac{3x|y|+2y|x|}{xy}\right|=5$ να αποδείξετε ότι οι x και y είναι ομόσημοι.

72. Αν α,β πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι : $|a|+|\beta|\leq\sqrt{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}$

73. Αν $x,y\neq 0$ να δείξετε ότι : $\left|\dfrac{x}{y}\right|+\left|\dfrac{y}{x}\right|\geq 2$

74. Να αποδειχτεί η ισοδυναμία : $|x+3y|<|y+3x|\Leftrightarrow|x|>|y|$

75. Αν είναι $|2a-5\gamma|\leq 2$ και $|3\beta-5\gamma|\leq 4$ να αποδείξετε ότι :

$|2a-3\beta|\leq 6.$

76. Αν είναι $a\beta\neq 0$ και $|a+3\beta|=|\beta+3\alpha|$, να αποδείξετε ότι :
$\left|\dfrac{a}{\beta}+1\right|=\left|\dfrac{\beta}{\alpha}+1\right|$

77.Αν $|a|\leq 2$ να δείξετε ότι : $|a^2-2a+6|\leq 14$

78. Αν ισχύει $d(a,2\beta)-d(2\alpha,\beta)=d(5,8)-d(2,-1)$ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ίσοι ή αντίθετοι.

79.Αν α<1<β , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$K=d(1,a)+d(1,\beta)-d(a,\beta)$

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

80. Να αποδείξετε ότι $d(a,\beta)\le d(a,3)+d(3,\beta)$

81. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί x , y για τους οποίους ισχύουν:

$|2x+3y-5|<9$ και $|x-y|<2$

Να αποδείξετε ότι:

Α) $x\in(-2,4)$

Β)η τιμή της παράστασης $A=||x-4|-6|-x$ είναι σταθερή.

82.Δίνονται τα σημεία Α,Β,Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών -1, 5 και x αντίστοιχα , με -1<x<5.

Α)Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων

$i)|x+1|$ ii)$|x-5|$

Β)Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος : $|x+1|+|x-5|$

Γ)Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+1|+|x-5|$ γεωμετρικά.

Δ)Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

83. Αν κ<λ<μ<ν και λ<x<ν να δείξετε ότι η παράσταση :

$$A=|\kappa-x|+|\lambda-x|+|\mu-x|+|\nu-x|$$

Είναι ανεξάρτητη του x.

84. Αν $||x|-|y||=|x+y|$ τότε τι συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς x,y.

85.Αν ισχύει $d(2\alpha,9\beta)=d(\alpha,0)$ να αποδείξετε ότι α=9β ή α=3β.

86. Να αποδείξετε ότι $d(4\alpha,0)\le d(4a^2,-1)$

87. Δίνεται η παράσταση : $A=|x-3|-|x+1|+|y-1|-|y+2|$

όπου $-1\le x\le 3$ και $-2\le y\le 1$

α)Να απλοποιήσετε την παράσταση Α

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

β)Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης Α.

88.Δίνονται πραγματικοί αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύουν :

$|2x+3y-5|<9$ και $|x-y|<2$

Να αποδείξετε ότι :

Α) $x\in(-2,4)$

Β)η τιμή της παράστασης $A=||x-4|-6|-x$ είναι σταθερή.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ