Άσκηση 1

Να λυθεί η ανίσωση: $|x-1|<4$

Λύση

Είναι: $|x-1|<4 \Leftrightarrow -4<x-1<4 \Leftrightarrow -4+1<x<4+1 \Leftrightarrow -3<x<5$

Άσκηση 2

Να λυθεί η ανίσωση: $|-2x+3|<1$

Λύση:

$|-2x+3|<1 \Leftrightarrow |2x-3|<1 \Leftrightarrow -1<2x-3<1 \Leftrightarrow -1+3<2x<1+3 \Leftrightarrow$

$2<2x<4 \Leftrightarrow 1<x<2$

Άσκηση 3

Να λυθεί η ανίσωση: $|x-3|\geq 2$

Λύση:

$$|x-3|\geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\geq 2 \\ x-3\leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2+3 \\ x\leq -2+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 5 \\ x\leq 1 \end{cases}$$

Άσκηση 4

Να λύσετε την ανίσωση: $|-3x+5|>-2$

Λύση

Επειδή το πρώτο μέλος είναι μη αρνητικός και το δεύτερο μέλος είναι αρνητικός , η ανίσωση αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

Άσκηση 5

Να λυθεί η ανίσωση : $3\leq |2x+5|\leq 7$

Λύση:

$3\leq |2x+5|\leq 7 \Leftrightarrow |2x+5|\leq 7$ και $|2x+5|\geq 3$

$|2x+5|\leq 7 \Leftrightarrow -7\leq 2x+5\leq 7 \Leftrightarrow -7-5\leq 2x\leq 7-5 \Leftrightarrow -12\leq 2x\leq 2$

Είναι $\Leftrightarrow -6\leq x\leq 1$

$$|2x+5|\geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5\geq 3 \\ 2x+5\leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\geq -2 \\ 2x\leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\leq -4 \end{cases}$$

Συναληθεύοντας έχουμε ότι: $x\in[-6,-4]\cup[-1,1]$

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

Ασκήσεις

1.Να λυθούν οι ανισώσεις:

$i)2x-1<-x+3-3(x-2)$ iii) $\frac{x+6}{4}-\frac{-x+8}{4}\geq\frac{6x-8}{5}-x+2$

$ii)\frac{x-3}{3}-\frac{x+4}{6}<\frac{x-6}{2}+2$ iv)-$5\left(\frac{x}{3}-1\right)\geq 2x+\frac{x-9}{3}-4$

$v)\frac{x+3}{5}-\frac{(x-1)^2}{4}<\frac{5x}{4}-\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$vi)\frac{x(x-3)^2}{2}-\frac{x(1-9x)}{3}>\frac{x^3}{2}$

2. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$i)\frac{x-2}{3}+\frac{1}{2}\geq 3(x-1)-\frac{1}{3}$

$ii)\frac{1}{2}\left[2(x+1)-\frac{2-x}{2}\right]\leq 6(x+1)-\frac{x}{4}$

$iii)1+\left[4-(2x-1)(x+3)\right]\geq 6+x(5-2x)-9$

$iv)(1-3x)^2-2x(x-1)<7(x+1)^2+12$

$v)-2+x+2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)>x(x-6)+x^2+1$

3.Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$i)-6<-x-1<3$

$ii)-x<-5x-4<-5x$

$iii)2+\frac{8-3x}{4}<5-\frac{x}{4}\leq\frac{4+x}{4}+3$

4.Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων :

$\frac{x(x+1)}{2}-\frac{(2x+1)^2}{8}>\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{8}$

$(x-1)(x+1)<(x-4)^2-25$

5.Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων :

$4-5(x-2)\geq 13-3(x+1)$ και 1-$\frac{7-x}{4}>\frac{x}{2}$

$\frac{x+1}{3}\geq\frac{x-1}{2}$ και $\frac{1}{2}x-1\geq x+1$

$3-\frac{1-2x}{2}\geq\frac{1}{2}$ και 6-$\frac{x+20}{7}\geq\frac{3x+30}{7}$

ΙΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

6. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ να λυθούν οι ανισώσεις:

$i)\lambda(x-1)>\lambda^2$ ii)λx>x+2

7.Να λυθούν οι ανισώσεις:

$i)|x|\le 3$ ii)$|x|\ge 3$ iii)$|x-1|\le 3$ iv)$|x-1|\ge 3$

$v)|-x|\le 3$ vi)$|-x+1|\ge 3$ vii)$|-x-4|\le 6$

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$i)|x-2|<6$ ii)$|2-x|\le 4$ iii)$|2x+3|<1$

$iv)|1-2x|>9$ v)$|3x+2|\ge 5$ vi)$|2x-4|>-3$

9.Να λύσετε τις ανισώσεις:

$i)2|x|-8<0$ ii)$4|x|-12>0$

10.Να λυθούν οι ανισώσεις:

$i)2\le|3x-1|<8$ ii)$-3\le|2x-3|\le 2$ iii)$2\le|x-1|<5$

$iv)-2\le|1-2x|\le 5$ v)$0\le|3-x|\le 3$ vi)$-3\le|x-1|\le -1$

11. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$i)|1-|2x+3||\le 5$ ii)$||x+2|-1|<5$

12.Να λύσετε τις ανισώσεις:

$i)|x-1|+|2x-2|>|5x-5|-6$ ii)$|x-2|+8<|5x-10|-|4-2x|$

$iii)|2x-1|+2-\frac{|6x-3|}{8}\ge\frac{|4-8x|+3}{5}$ iv)$8-|2x-6|\le\frac{|3-x|-4}{}$

13. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$i)\frac{|2-x|-1}{3}-|x-2|>\frac{|2-x|-4}{2}+2$ ii)$\frac{|x-3|+2}{3}-\frac{|x-3|-1}{4}\le 1$

14. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$i)\frac{3|x-1|+1}{2}+\frac{2|x-1|-1}{3}>\frac{|x-1|+2}{3}$ ii)$8|x-1|<5+\frac{15|1-x|-8}{2}$

$iii)\frac{2|x-2|-3}{4}<\frac{|x-2|+1}{3}$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$i)|2x-4|=2x-4$ ii)$|2x-4|=4-2x$

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

16. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$i)|x-3|+5|x^2-9|\le 0$ ii)$|x-1|-2|x^2-1|\le 0$

17. Να αποδείξετε ότι για $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $\left|x+\frac{1}{x}\right|\ge 2$

18. Να λυθεί η ανίσωση: $|2-4x|+3|x-2|-7<2x$

19.Να λυθεί η ανίσωση : $|x-3|+4|3-x|-4<2-x$

20.Να λυθούν οι ανισώσεις:

$i)||x|-5|<2$ ii)$|x|^3-2x^2-5|x|+6>0$

21. Να λυθεί η ανίσωση : $|x^2-1|\le 2x^2+2$

22.Α.Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2-x-6=0$ (1)

Β)Να λύσετε την ανίσωση : $|x-1|<2$

Γ)Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

23.΄Εστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς -6 και 4 αντίστοιχα και Μ το μέσο του ΑΒ.

Α) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ.

Β)Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-4|\le|x+6|$ και να βρείτε τις λύσεις της.

Γ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το συμπέρασμα σας.

24. Δίνεται το τριώνυμο $x^2-(a+1)x+4+a=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Α)Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι : $\Delta=(\alpha-1)^2-16$

Β)Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες .

Γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1,x_2 ,τότε:

i)να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1+x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α.

ii) Να αποδείξετε ότι : $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=4$

25.Δίνεται η εξίσωση : $x-\frac{2x-1}{3}=\frac{3(x+1)}{4}$ και η ανίσωση $\frac{\mu(x-1)}{2}-\frac{2x-\mu}{5}<\frac{x}{10}-\frac{2}{5}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η λύση της εξίσωσης επαληθεύει την ανίσωση.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

26. Δίνεται η εξίσωση :

$$\lambda^2(x-1)-(\lambda-2)(\lambda+2)=4-5(2\lambda-5x)$$

Αν η εξίσωση είναι ταυτότητα , να βρείτε :

Α) τον αριθμό λ

Β)τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

$$\frac{x+\lambda}{4}+\frac{x}{2-\lambda}\geq\frac{x-(\lambda-2)}{6} \qquad \frac{7-3x}{12}+\frac{3}{4}-(\lambda-3)x<\frac{\lambda(\lambda-2x)}{6}-4$$

27. Δίνεται η εξίσωση : $2x^2+(\lambda-4)x-\lambda=0$

Α)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

Β)Έστω S το άθροισμα και P το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης.

i)Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει ότι : $-P<S<5-P$

ii)Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $A=\sqrt{\lambda^2+6\lambda+9}+\sqrt{\lambda^2-4\lambda+4}$ είναι σταθερή.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ