Αν έχω τριώνυμο της μορφής : $\alpha\cdot x^2+\beta x+\gamma,\alpha\neq 0$.

Υπολογίζω την Διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

- Αν Δ>0 τότε η εξίσωση έχει 2 άνισες ρίζες έστω x_1,x_2 τότε:

	x_1		x_2
$\alpha\cdot x^2+\beta x+\gamma$	Ομόσημο του α	Ετερόσημο του α	Ομόσημο του α

- Αν Δ=0 τότε η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα έστω x_1 , τότε:

	x_1	
$\alpha\cdot x^2+\beta x+\gamma$	Ομόσημο του α	Ομόσημο του α

- Αν Δ<0 τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες , τότε:

$\alpha\cdot x^2+\beta x+\gamma$	Ομόσημο του α

<u>Παράδειγμα:</u>

Για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

$i) x^2-3x+2 \qquad ii) 2x^2-5x+6 \qquad iii) 4x^2+4x+1$

Λύση:

i)Θα λύσω αρχικά την εξίσωση $x^2-3x+2=0$.

Βρίσκω την Διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1$.

Άρα η εξίσωση έχει 2 άνισες ρίζες :

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\left[\begin{array}{l}\frac{3+1}{2}=2\\ \frac{3-1}{2}=1\end{array}\right.$$

Άρα

	1		2
x^2-3x+2	+	-	+

Δηλαδή , αν αντικαταστήσω στο x αριθμό μέχρι το 1 , το αποτέλεσμα των πράξεων θα είναι θετικό, αν αντικαταστήσω αριθμό από 1 μέχρι 2 τότε το αποτέλεσμα θα είναι αρνητικό και αν αντικαταστήσω αριθμό πάνω από 2 το αποτέλεσμα θα είναι θετικό. Φυσικά , αν αντικαταστήσω όπου x το 1 ή το 2 το αποτέλεσμα θα είναι μηδέν γιατί αυτοί οι αριθμοί είναι ρίζες της εξίσωσης.

ii) Βρίσκω την Διακρίνουσα της αντίστοιχης εξίσωσης, οπότε:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot2\cdot6=25-48=-23<0$, οπότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.Άρα

$2x^2-5x+6$	+

Δηλαδή , οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό και αν αντικαταστήσουμε στη θέση του x το αποτέλεσμα των πράξεων θα είναι πάντα θετικό.

iii) Βρίσκω την Διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot4\cdot1=16-16=0$

Άρα η εξίσωση έχει 1 (διπλή) ρίζα την $x_1=\dfrac{-\beta}{2\alpha}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}$

Οπότε,

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x^2+4x+1$	+		+

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα:

$i)x^2-3x+2$ $\quad$ $\text{ii})x^2-5x+6$ $\quad$ $\text{iii})3x^2+5x+2$

$iv)-3x^2-3x+18$ $\quad$ $\text{v})2x^2+5x-3$ $\quad$ $\text{vi})x^2+x+\dfrac{1}{4}$

2.Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα:

$i)x^2-6\sqrt{2}x+9$ $\quad$ $\text{ii})x^2-4\sqrt{3}x+8$ $\quad$ $\text{iii})x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3}$

3. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα:

$\left(\kappa^2-\lambda^2\right)x^2-2\left(\kappa^2+\lambda^2\right)x+\kappa^2-\lambda^2,\kappa\neq\pm\lambda$

$\alpha^2x^2-2a^3x+a^4-1,a\neq0$

$\left(x+y\right)^2-7\left(x+y\right)+10$

$5ax^2+\left(5a-3\beta\right)x-3a\beta,\alpha\neq0$

$x^2-\left(2a+\beta\right)x+a^2+a\beta$

4.Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$i)\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$ $\quad$ $\text{ii})\dfrac{3x^2+3x-18}{x^2+4x+3}$ $\quad$ $\text{iii})\dfrac{9x^2-4}{9x^2-12x+4}$

$iv)\dfrac{x^2+3x-18}{x^2+4x-12}$ $\quad$ $\text{v})\dfrac{x^2-2\lambda x-3\lambda^2}{x^2-7\lambda x+12\lambda^2}$ $\quad$ $\text{vi})\dfrac{x^2-16}{x^2-6x+8}$

5.Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $\dfrac{\left(x^2+3x-4\right)^2-\left(x^2-x\right)^2}{\left(x^3-1\right)-\left(x^2+x-2\right)}$

6.Να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

$i)3x^2+2x+4$ ii)$-x^2+10x-25$ iii)$-3x^2+4x-5$

$iv)3x^2-6x+3$ v)$3x^2+7x+2$ vi)x^2-6x+9

7. Να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων

$i)5x^2-3x-2$ ii)$-x^2+2x-1$ iii)$-x^2+\frac{1}{2}$

$iv)-x^2+x+2$ v)$3x^2-6x+3$ vi)x^2+4x+4

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$\iota)-x^2-1>0$ ii)$4x^2-9<0$ iii)$9-x^2<0$

$iv)x^2-9<0$ v)$x^2-7x\le 0$ vi)$6x^2+8>0$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$i)5x+x^2>0$ ii)$-x^2+4x\le 0$ iii)$-x^2+8x\ge 0$

$iv)2x^2-7x\ge 0$ v)$-3x^2+4x>0$ vi)$-9x^2+16\ge 0$

10. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$i)x^2-9\ge 0$ ii)$x^2-9<0$ iii)$x^2>16$

iv)$\frac{x^2}{2}\ge 18$ v)$4x^2-25>0$ vi)$-25x^2+64>0$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$i)(3x-2)^2>16$ ii)$(3x-2)^2<1$

12. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$i)3x^2-5x-2\le 0$ ii)$4x^2+7x+8>0$ iii)$x^2+x+1>0$

$iv)x^2+2x-3>0$ v)$x^2-3x-10\le 0$ vi)$2x^2-4x+2<0$

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$i)-x^2+3x+4\le 0$ ii)$-3x^2+7x-4>0$ iii)$-3x^2+2x-1<0$

$iv)-2x^2+x-1>0$ v)$-x^2+2x-1<0$ vi)$-2x^2+5x-4>0$

14. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$i)-x^2+6x-9<0$ ii)$x^2-6x+9<0$ iii)$4x^2+4x+1\le 0$

$iv)4x^2-12x+9>0$ v)$9x^2-6x+1\ge 0$ vi)$-x^2+10x-25\le 0$

15.Να βρείτε για ποιες τιμές του χ συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$i) x^2 - 5x + 4 \geq 0$ και $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$

$ii) x^2 + x - 2 \geq 0$ και $x^2 + 2x - 8 < 0$

$iii) x^2 - 2x - 3 < 0$ και $-x^2 + x + 2 \geq 0$

$iv) x^2 + x - 6 \leq 0$ και $x^2 - 2x + 1 > 0$

16.Για ποιες τιμές του x ισχύει $-5 < -x^2 + 2x + 3 < 0$

17.Για ποιες τιμές του χ ισχύουν:

$i) 4(x+1) < x(x+7) < 2(2x+5)$

$ii) 3x < x^2 < 6x - 9$

18.Να λυθούν οι ανισώσεις:

$i) x^2 - 4|x| + 3 > 0$ $\quad$ $ii) (3x+2)^2 - 5|3x+2| + 6 < 0$ $\quad$ $iii) x^4 - 7x^2 + 10 > 0$

$iv) x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$ $\quad$ $v) (x+2)^2 - 5|x+2| + 4 > 0$ $\quad$ $vi) 2x^2 - 5|x| + 2 > 0$

19.Να λυθούν οι ανισώσεις:

$i) |x^2 + 3x - 1| < 3$ $\quad$ $ii) |x^2 - 2x - 9| > 6$ $\quad$ $iii) |x^2 2x + 8| > 8$

20Να λύσετε τις εξισώσεις:

$i) |x^2 - 6x| = x^2 - 6x$ $\quad$ $ii) |x^2 - 6x| = 6x - x^2$ $\quad$ $iii) |x^2 - 9| = x^2 - 9$

$iv) |x^2 - 9| = 9 - x^2$ $\quad$ $v) |x^2 - 3x - 4| = x^2 - 3x - 4$ $\quad$ $vi) |x^2 - 3x - 4| = 4 - x^2 + 3x$

21.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $x^2 - (3\lambda - 1)x + (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

22.Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$,$\lambda \neq -2$

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες

Α)η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

Β)το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2

23.Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(1-\lambda)x^2 - 3(\lambda - 1)x + 6 = \lambda$

Α)έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες

Β)δεν έχει πραγματικές ρίζες

24.Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2 - (\lambda - 2)x + 2 - \lambda = 0$ έχει ρίζες.

25.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \lambda x - (\lambda + 3) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

26.Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$,$\lambda \neq -2$

Α)Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Β)Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1 \cdot x_2 = -3$

27.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $2x^2-10\lambda x+7\lambda-1=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

28. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^2+(\lambda-3)x+6-\lambda=0$ έχει πραγματικές και άνισες ρίζες

29.Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

Α)Να λύσετε την εξίσωση όταν λ=0

Β)Έστω $\lambda \neq 0$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες , τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

ii) Αν $x_1=-1$ και $x_2=-1+\dfrac{2}{\lambda}$ είναι οι δύο ρίζες της (1) να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1-x_2|>1$

30.Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2+\lambda x+\lambda^2-\lambda-2=0$

31.Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες πραγματικές και άνισες:

$i)(\lambda+5)x^2-2(1-\lambda)x+1=0$,$\lambda \neq -5$

ii)$(5\lambda-2)x^2-6\lambda x+3\lambda+1=0$,$\lambda \neq \dfrac{2}{5}$

32. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+(\lambda-1)x+\lambda^2-\lambda+1=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

33.Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $(\lambda+3)x^2-2(\lambda-2)x+3(\lambda-2)=0$

34.Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $4x^2-(\lambda+1)x+4=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

35. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $4x^2-(\mu+2)x+1=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

36. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $-x^2+(\lambda+5)x-3\lambda-7=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

37.Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0$,$\lambda\neq$ -2

Α)Να δείξετε ότι διακρίνουσα της εξίσωσης είναι Δ=12λ+25

Β)Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\neq-2$,ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

Γ)Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P=x_1\cdot x_2$

Δ)Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1,x_2 της εξίσωσης να ισχύει $(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0$

38. Να αποδείξετε ότι η ανίσωση $x^2+6\lambda x+9\lambda^2+4>0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό χ.

39.Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η ανίσωση $-x^2+(\lambda-5)x+\lambda-8\leq0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

40.Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες το τριώνυμο $(\mu-5)x^2-4x+4$ είναι θετικό για κάθε πραγματικό αριθμό x.

41.Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η ανίσωση $(\lambda-6)x^2+(\lambda-3)x-1<0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

42.Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες ισχύει : $(3-\lambda)x^2-2(7-4\lambda)x+8+4\lambda>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

43.Αν $|\lambda|<\sqrt{3}$, να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οι τιμές του τριωνύμου $-4x^2+8x-\lambda^2-1$ είναι αρνητικές

44.Δίνεται η εξίσωση $x^2-(3\lambda-2)x+\lambda+1=0$,$\lambda\in\mathbb{R}$

Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης διάφορες του μηδενός

Α)Να υπολογιστούν οι παραστάσεις $i)x_1+x_2$ $\quad$ $\text{ii)}x_1\cdot x_2$

Β)Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να ισχύει η σχέση $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>1$

45.Δίνεται η εξίσωση : $x^2-\lambda x+(\lambda^2+\lambda-1)=0, \lambda\in\mathbb{R}$

Α)Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες πραγματικές

Β) Να λύσετε την ανίσωση : $S^2-P-2\geq0$, όπου S , P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών

46 α)Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$

Β)Να λύσετε την ανίσωση : $-x^2+2x+3\leq 0$

Γ)Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

47.Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-x+\left(\lambda-\lambda^2\right), \lambda\in\mathbb{R}$

Α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Β)Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες;

Γ) Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1<x_2$ τότε:

i)να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$

ii)να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$f\left(x_1\right), f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right), f\left(x_2+1\right)$$

48.Δίνεται η εξίσωση $x^2-3x+\lambda-1=0$

Α)Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

Β)Αν x_1, x_2 οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης να βρείτε τους λ για τους οποίους ισχύει $\frac{2}{x_1\cdot x_2}<x_1+x_2$

49.Δίνεται το τριώνυμο : $f\left(x\right)=x^2-6x+\lambda-3 \quad ,\lambda\in\mathbb{R}$

Α)Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου

Β)Να βρείτε τις τιμές λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες

Γ)Αν 3<λ<12 τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες

ii)Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ δύο ρίζες και κ,μ είναι δύο αριθμοί με κ<0 και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του $\kappa\cdot f\left(\kappa\right)\cdot\mu\cdot f\left(\mu\right)$

50.Δίνεται η εξίσωση $x^2-\left(2\lambda^2-4\lambda\right)x+\lambda^4-4\lambda^3+4\lambda^2=0$

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

Β)Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την διπλή ρίζα x_0 της εξίσωσης ισχύει $x_0<3$

47. Θεωρούμε την εξίσωση : $x^2-2\lambda x+2\lambda^2-4\lambda=0$

Α) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες

Β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης , να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει $x_1\cdot x_2>2\cdot x_1+2x_2-6$

51.Θεωρούμε την εξίσωση : $x^2+\left(\lambda+3\right)x+\lambda+6=0$

Α)Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες
Β)Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης , να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_1^2 + x_2^2 < 42$

52.Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - x - \lambda = 0 \quad ,\lambda \neq 0$
Α)Να δειχτεί ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \neq 0$
Β)Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες να υπολογίσετε τις παραστάσεις $i) x_1 + x_2 \qquad ii) x_1 \cdot x_2$
Γ)Να βρεθεί ο λ ώστε $x_1^2 + x_2^2 > 3$

53.(Τ.Θ) α. Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$
Β)Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α).

54.(Τ.Θ). α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0 \quad (1)$
Β)Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| < 2 \quad (2)$
Γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του χ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

55.(Τ.Θ) α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$
Β)Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$
Γ)Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

56.(Τ.Θ).Δίνεται πραγματικός αριθμός χ, για τον οποίο ιαχύει $d(x, -2) < 1$
Να δείξετε ότι:
$\alpha) -3 < x < -1$
$\beta) x^2 + 4x + 3 < 0$

57.(Τ.Θ).Δίνεται το τριώνυμο : $2x^2 - 3x + 1$
Α)Να βρείτε τις ρίζες του
Β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$
Γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης :
$2x^2 - 3x + 1 < 0$

58.(Τ.Θ). α) Να λυθεί η ανίσωση: $3x^2 - 4x + 1 \leq 0.$
Β)Αν α,β δύο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης , να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

59(Τ.Θ).Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό χ.
Β)Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:
$\mathrm{B} = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$

60.(Τ.Θ). α.Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<2$

Β)Να λύσετε την ανίσωση : $|2-3x|>5$

Γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δύο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα , να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή με ένωση διαστημάτων.

61.(Τ.Θ).α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$

Β)Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\geq 3$

Γ)Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

62.(Τ.Θ). α) Να λύσετε την εξίσωση : $|2x-4|=3|x-1|$.

Β)Να λύσετε την ανίσωση : $|3x-5|>1$.

Γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

63.(Τ.Θ). Αν ο πραγματικός αριθμός χ ικανοποιεί τη σχέση : $|x+1|<2$

Α) να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$

Β)να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης : $K=\frac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του χ.

64.(Τ.Θ). α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\geq 5$

Β)Να βρείτε τους αριθμούς χ που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

Γ)Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

65. (Τ.Θ) α) Να λύσετε την ανίσωση : $|x-5|<4$

Β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση , να αποδείξετε ότι:

$\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$

66. (Τ.Θ) Δίνονται δύο τμήματα x,y για τα οποία ισχύουν :

$|x-3|\leq 2$ και $|y-6|\leq 4$

Α) Να δείξετε ότι : $1\leq x\leq 5$ και $2\leq y\leq 10$

Β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y.

67.(Τ.Θ) α) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2-10x+21<0$

Β) Δίνεται η παράσταση : Α=$|x-3|+|x^2-10x+21|$

Γ)Για 3<χ<7 να δείξετε ότι: $A=-x^2+11x-24$

Δ)Να βρείτε τις τιμές του $x\in(3,7)$ για τις οποίες ισχύει Α=6.

68.(Τ.Θ) α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\geq 3$.

Β)Αν $\alpha \geq -1$ να γράψετε την παράσταση $A=||a+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

69(Τ.Θ).Δίνεται πραγματικός αριθμός χ για τον οποίο ισχύει : $|x-2|<3$.

Α) Να αποδείξετε ότι : -1<χ<5

Β)Να απλοποιήσετε την παράσταση : $K=\dfrac{|x+1|+|x-5|}{3}$

70.(Τ.Θ) Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$

Α)Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$

Β)Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Κ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ)Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ.

71.(Τ.Θ) Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$

Α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι : $\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

Β)Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

72.(Τ.Θ) α)Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2-2x-1$

Β)Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση:

$A(x)=\dfrac{x-1}{3x^2-2x-1}$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

Γ)Να λύσετε την εξίσωση : $|A(x)|=1$

73.(Τ.Θ). Δίνεται η εξίσωση : $x^2-\lambda x+\left(\lambda^2+\lambda-1\right)=0 \quad (1)$,$\lambda\in\mathbb{R}$

Α)Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

Β)Να λύσετε την ανίσωση : $S^2-P-2\geq 0$ όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

74.(Τ.Θ).Δίνονται τα σημεία Α,Β,Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους -2 , 7 , χ αντίστοιχα , με -2<χ<7 .

Α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

$i)|x+2|$

$ii)|x-7|$

Β)Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος :

$|x+2|+|x-7|$

Γ)Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $A = |x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά.

Δ)Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

75.(Τ.Θ) Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$|\alpha - 2| < 1$

$|\beta - 3| \le 2$

Α) Να αποδειχθεί ότι: 1<α<3.

Β)Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β.

Γ)Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση 2α-3β.

Δ)Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

76.(Τ.Θ).Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2| < 3$ και $x^2 - 2x - 8 \le 0.$

Α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

Β)Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 4)$

Γ)Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων , να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

77.(Τ.Θ).Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \le |x| \le 3$ και $x^2 - 4x \prec 0.$

Α)Να βρείτε τις λύσεις τους.

Β)Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$

Γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων , να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

78.(Τ.Θ).Δίνεται το τριώνυμο : $x^2 - 2x - 8$

Α)Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού χ.

Β)Αν $\kappa = -\dfrac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης : $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν , θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ)Αν ισχύει -4<μ<4 , τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης : $\mu^2 - 2|\mu| - 8;$ Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

79.(Τ.Θ) α).Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$

Β)Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\dfrac{46}{47}\right)^2 + 5\dfrac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

Γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

80.(Τ.Θ). α)Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+1\geq\frac{5}{2}x \quad (1)$

Β)Δίνονται δυο αριθμοί κ,λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση : $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$

i)Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ,λ

ii) Να δείξετε ότι : $|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$

81.(Τ.Θ). Δίνεται πραγματικός αριθμός α , που ικανοποιεί τη σχέση : $|\alpha-2|<1$.

Α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α .

Β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο : $x^2-(a-2)x+\frac{1}{4}$

i)Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $x^2-(a-2)x+\frac{1}{4}>0$

82.(Τ.Θ).α) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2+x-6<0$

Β)Να λύσετε την ανίσωση : $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$

Γ)Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και α+1 όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$. Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει Ε<6 τότε:

i)Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2}<\alpha<2$

ii)Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

83.(Τ.Θ). α)Δίνεται το τριώνυμο x^2-3x+2 ,x $\in\mathbb{R}$.Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

Β)Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α,β διαφορετικούς από το 0 με α<β για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$

Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$

84.(Τ.Θ) α)i)Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου : $x^2+9x+18$

ii)Να λύσετε την εξίσωση: $|x+3|+|x^2+9x+18|=0$

β)i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού χ.

ii) Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες ισχύει : $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18$

85.(Τ.Θ). Δίνεται η εξίσωση : $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0 \quad (1) \quad ,\lambda\in\mathbb{R}$

Α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι : $\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16$.

Β)Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Γ)Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1, x_2) < \sqrt{24}$.

86.(Τ.Θ). Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2 + (2\lambda+3)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1)$,$\lambda \neq -2$.

Α)Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta = 12\lambda + 25$.

Β)Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Γ)Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $\mathrm{P} = x_1 \cdot x_2$

Δ)Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση : $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0$

87.(Τ.Θ).Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1)$,$\lambda \in \mathbb{R}$

Α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$

Β)Έστω $\lambda \neq 0$

i)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε:

ii)Αν $x_1 = -1$ και $\mathrm{x}_2 - 1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$

88.(Τ.Θ). Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Α)Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες.

Β)Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ)Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα (-2,4).

89.(Τ.Θ).α)Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

Β)Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2 + (2-\lambda)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1)$

i)Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3. + \infty)$ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες άνισες.

ii)Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

90.(Τ.Θ).Δίνεται το τριώνυμο : $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}\text{-}\{0\}$

Α)Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

Β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου , να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $\mathrm{P} = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

Γ) Αν λ<0 , τότε:

i)το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii)να αποδείξετε ‘ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$ όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

91.(Τ.Θ). Δίνεται η εξίσωση : $ax^2 - 5x + a = 0 \quad \alpha \neq 0$

Α)Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς , που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

Β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης , όταν α=2.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση : $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

92.(Τ.Θ). Δίνεται η εξίσωση : $(x-2)^2 = \lambda(4x-3) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

Β)Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

Γ)Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης , στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

i)να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $\mathrm{P} = x_1x_2$

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{A} = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

93.(Τ.Θ).Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0 \qquad (1)$,$\lambda \in \mathbb{R}$

Α)Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Β)Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

Γ)Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1) , τότε να βρείτε για ποιες τιμέσε του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$

94.(Τ.Θ). Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x + 1 = 0 \qquad (1)$,$\lambda \in \mathbb{R}$

Α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

Β)Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) , τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

Γ)Για λ>2 να αποδείξετε ότι:

i)Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$.

95.(Τ.Θ).Δίνεται η εξίσωση: $\alpha\beta x^2 - \left(a^2+\beta^2\right)x + \alpha\beta = 0$, όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

Α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι : $\Delta = \left(\alpha^2 - \beta^2\right)^2$

Β)Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α,β ώστε η εξίσωση να έχει δύο άνισες ρίζες, τις οποίες να προσδιορίσετε ως συνάρτηση των α,β.

Γ)Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \dfrac{a}{\beta}$ και $x_2 = \dfrac{\beta}{\alpha}$ τότε να αποδείξετε ότι: $\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right) \geq 4$

96.(Τ.Θ).Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - \left(\lambda^2+1\right)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$-$\{0\}$

Α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Β)Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου , να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

Γ) Αν λ>0 το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ)Για κάθε λ>0 , αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου , να αποδείξετε ότι: $\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

97. (Τ.Θ). Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 - 4\left(\lambda + \dfrac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0$, $\lambda \in (0,4)$

Α)Να βρείτε :

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii)το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

Β)Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$,$\lambda \in (0,4)$

Γ)Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογωνιο;

98. Δίνεται η παράσταση:

$$\mathrm{A} = (\alpha+1)\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[8]{\alpha}+1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{8}}-1\right) \quad \text{με} \quad \alpha=\sqrt{2012}.$$

Α.Να υπολογίσετε την παράσταση Α.

Β.Να λύσετε την ανίσωση $\left|\mathrm{A} - 2010 + x\right| + \left|x^2 - 1\right| \leq 0.$