1. Δίνονται τα σημεία $A\left(\lambda^2+1,\lambda+2\right)$, $B\left(\lambda-3,\lambda^2+2\lambda\right)$,$\lambda\in\mathbb{R}$

Β1.Αν τα Α,Β είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y να βρείτε το λ.
Β2. Βρείτε τις τιμές του λ , ώστε το σημείο Β να βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος.
Β3. Για λ=0,
i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία Α και Β , καθώς και το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα x'x.
ii.Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία $y=\left(k^3+\frac{17}{2}\right)x-7$, να βρείτε την τιμή του $k\in\mathbb{R}$

2.Δίνεται η παράσταση $A=\frac{x}{|x|-x}-\frac{y}{|y|+y}$

Α)Να βρείτε τις τιμές των x,y για τις οποίες ορίζεται η παράσταση.
Β)Να αποδείξετε ότι Α=-1
Γ)Να λύσετε την ανίσωση : $\left|x^2-9\right|+\left|5y-y^2\right|\le 0$

3.Δίνονται οι παραστάσεις $K(x)=|x-2|-|3-x|$ και $\Lambda(x)=1-|x-3|$ και οι αριθμοί $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ και $\beta=\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{6}}$.

i) Να δείξετε ότι α=5 και β=3
ii) Να λύσετε τις εξισώσεις Λ(x)=α και Λ(x)=-β-1
iii)Να λύσετε την εξίσωση K(x)=0
iv) Να λύσετε την εξίσωση K(x)=Λ(x)

4.Για τον αριθμό x ισχύει ότι: $x^2+3x-10<0$

i) Να δείξετε ότι $x\in(-5,2)$ και να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης $x^3+12=0$ είναι και λύση της ανίσωσης.
ii) Για τις παραπάνω τιμές του x να βρείτε τον αριθμό $k=|2x+10|-3|2-x|+5|x-4|$
iii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{k+1}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt[4]{k+1}}\cdot\sqrt[3]{2}$

5. Για τους αριθμούς α και β ισχύει ότι: $\alpha^2+\beta^2=4\beta-4$

i) Να δείξετε ότι α=0 και β=2.
ii)Αν $\alpha<x<\beta$ και $K=\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$, να δείξετε ότι K=2.
iii) Αν $\Lambda=\sqrt[3]{(\beta+1)\sqrt{27}\sqrt[4]{9}}$ να δείξετε ότι Λ=3.
iv) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\sqrt{y^2-4y+4}}{K}-\frac{5}{\Lambda}=\frac{|2-y|}{\Lambda}$

6. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x^2-\lambda x+\lambda-1$,$\lambda\in\mathbb{R}$

Α)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει πραγματικές ρίζες , για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Β)Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης g(x)=0 τότε:

i) να εκφράσετε συναρτήσει του λ την παράσταση $x_1^2+x_2^2$.

ii) να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει

$$\frac{4|x_1x_2+3|-2}{3}+5=\frac{14|-x_1-x_2-2|}{4}$$

iii) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(\lambda)=\sqrt{x_1^2+x_2^2-5}+2017$$

7. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+x-4$

Α)Να βρεθεί το πρόσημο του τριωνύμου

Β)Να λύσετε την ανίσωση $|-x^2+x-4|\succ 2(x+1)$

8. Δίνονται οι παραστάσεις

$$\mathrm{A}=d(x,4),\quad \mathrm{B}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}\quad \text{και}\quad \Gamma=\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$$

i) Να αποδείξετε ότι Β=2

ii)Να αποδείξετε ότι $\Gamma=8\sqrt{3}$

iii)Να λύσετε την εξίσωση $2\mathrm{A}=\sqrt{3}\Gamma$

iv)Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{B}\le\mathrm{A}\le\frac{\Gamma\sqrt{3}}{3}$

9. α)Να λύσετε την εξίσωση $\frac{|6x-3|}{2}+2=2|2x-1|$

Β)Αν κ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (α) , να λύσετε την ανίσωση $|1-x|<\kappa$

10. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β.

i) Να αποδείξετε ότι : $2\alpha^2+\beta^2+10\alpha\ge-2\left(\alpha\beta+\frac{25}{2}\right)$

ii)Αν ισχύει $2\alpha^2+\beta^2+10\alpha=-2\left(\alpha\beta+\frac{25}{2}\right)$ να αποδείξετε ότι α=-5 και β=5.

iii) Να λύσετε τις ανισώσεις $-x^2+\beta x-6<0$ και $\mathrm{x}^2+a\le11$

iv)Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του προηγούμενου ερωτήματος.

11. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\lambda x^2+(\lambda-1)x+\lambda-1$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Α)Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση f(x)=0 να έχει μοναδική ρίζα.

Β)Για $\lambda\neq 0$, να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $f(x)>0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ)Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει δυο πραγματικές ρίζες x_1,x_2 , τότε:

i) να αποδείξετε ότι $x_1^2x_2+x_1x_2^2\leq 0$

ii)να λύσετε ως προς λ την ανίσωση: $\left|x_1^2x_2+x_1x_2^2\right|\leq\frac{1}{4}$

12. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{(2x^2+7x-15)(4x-4)}{8x-12}$

Α)Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδειχθεί ότι $f(x)=x^2+4x-5$

Β) Για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται κάτω από τον x'x ;

Γ)Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{f(3)}+\sqrt[3]{8f(4)}}{\sqrt{f(2)}-3}=-5\left(\sqrt{7}+3\right)$

13. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει $\alpha_6=8\alpha_3$ και το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της ισούται με 93.

Α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και την διαφορά ω

Β)Να βρείτε το άθροισμα $\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\ldots+\alpha_{13}+\alpha_{14}$.

Γ)Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}2x+\beta & ,x<6\\ \alpha x-\beta & ,x\geq 6\end{cases}$

Διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha_4,\alpha_5)$ και $\mathrm{B}(\alpha_2,\alpha_3)$

i)Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

ii)Για α=6 , β=24 να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία (ε):y=6.

14. α)Να βρείτε το $x\in\mathbb{R}$ ώστε οι αριθμοί κ=2x+1 , λ=5x+1 , μ=x+11 να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Α(κ,λ+1) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\mu}{6}$

Γ)Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες x'x και y'y.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|3x^2-x+1\right|-2\left|x^2+2\right|+1$.

Α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2-x-2$, $x\in\mathbb{R}$

Β)Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0

Γ)Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)\leq 10$

Δ)Να λύσετε την ανίσωση $f^2(x)-2f(x)-8=0$

16.Δίνονται οι παραστάσεις $A=\left|\sqrt{15}-4\right|+\left|3-\sqrt{15}\right|+\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}\cdot\sqrt[3]{4}$ και B=5+8+11+…+155.
Α)Να δείξετε ότι Α=3
Β)Να δείξετε ότι Β=4080
Γ)Να λύσετε την ανίσωση: $\left|1-2y\right|\leq A$
Δ)Να λύσετε την εξίσωση : $\left(x^7+Bx\right)\cdot\left(x^3-64\right)=3-A$

17.Δίνεται η εξίσωση 2ου βαθμού $x^2+(\mu-3)x+1-2\mu=0$.
Α) Να δειχτεί ότι δέχεται πάντα δύο ρίζες.
Β)Πάνω σε έναν άξονα Ox , θεωρούμε τα σημεία M_1, M_2 με τετμημένες τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης x_1, x_2. Για ποια τιμή του μ , οι κύκλοι με διαμέτρους τα OM_1, OM_2 εφάπτονται εξωτερικά; (Να μην βρεθούν οι ρίζες)
Γ)Αν S είναι το άθροισμα των εμβαδών αυτών των κύκλων να μελετηθούν οι μεταβολές(μονοτονία-ακρότατα) της $y=\frac{4S}{\pi}$ (συναρτήσει του μ)
Δ)Για ποια τιμή του μ ισχύει η $\frac{x_1}{2x_2}+\frac{x_2}{2x_1}+3=0$

(Baccalaurreat Pontichery)

18.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{5-\left|x-2\right|}}{x-2}$
Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
Β)Να βρείτε τα σημεία όπου η γραφική παράσταση της f , τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

19.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sqrt{-x^2-x+2}$
Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
Β) Να αποδείξετε ότι : $\left[2f\left(-1\right)+3f\left(0\right)\right]\cdot\sqrt{3}-5\sqrt{6}=f\left(1\right)$
Γ)Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες
$x_1=\frac{2}{f\left(0\right)}$ και $x_2=\sqrt{8}+f\left(1\right)$

20.Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(\lambda-2\right)x^2-2\left|\lambda\right|x+\lambda+2 \quad \lambda\in\mathbb{R}-\{2\}$
Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{2\}$.
Β)Αν λ=4, τότε
i)να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 2$.

ii)να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

iii) να βρείτε τα διαστήματα όπου η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την ευθεία y=6.

21.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax-\sqrt{x-2}$ για την οποία ισχύει f(11)-f(6)=14.

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι α=3.

Β)Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα y'y.

Γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{1}{f(x)-3x}$

22.Δίνεται η εξίσωση $2x^2+(\lambda-4)x-\lambda=0$ (1) $\lambda\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1,x_2 για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

ii)Αν το άθροισμα των ριζών είναι τριπλάσιο από το γινόμενο τους, να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$.

iii)Για λ=-2 να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x_1^2 και x_2^2.

23.Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x+\gamma=0$ και x_1,x_2 οι ρίζες της. Αν ισχύει ότι οι αριθμοί x_1,x_2 είναι ετερόσημοι

και $|x_1\cdot x_2|=2x_1+2x_2$.

i) Να αποδείξετε ότι γ=-4.

ii) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha=(1+x_1)^{2015}\cdot(1+x_2)^{2015}$

iii)Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{\alpha}{x_1},\dfrac{a}{x_2}$.

24.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x+1-3a\beta$,$\alpha\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το Α(α+β,0).

i)Να δείξετε ότι α=β=1.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

iii) Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=3 , να κατασκευάσετε όλες τις εξισώσεις 2ου βαθμού που έχουν ρίζες τις $\dfrac{x_1^2}{x_2},\dfrac{x_2^2}{x_1}$.

25.Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=2x^2-2(\lambda-5)x-(\lambda-5)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Α)Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου ισούται με : Δ=4(λ-5)(λ-3).

Β)Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Γ)Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{3}{4}$

Δ)Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $|f(x)| = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ε)Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x για κάθε $x \in \mathbb{R}$

26.Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$ (1) ,$\lambda \in \mathbb{R}$

i)Να αποδείξετε ότι η (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii)Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0.$

iii)Για λ=1 να βρείτε την τιμή της παράστασης Κ= $x_1^2 \cdot x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2.$

27.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - (2\lambda - 1)x - 2\lambda + 1}$,$\lambda \in \mathbb{R}$

i)Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού όλο το R.

ii)Για λ=0 , να αποδείξετε ότι $\dfrac{3f(1) - 2\sqrt{2}}{f(1) - \sqrt{2}} - \sqrt{6} = 5$

iii)Για λ=-1 , να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $x + f(0), 2x - 1, x - f(0)$ δεν μπορεί να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

iv) Για λ=-1 , να λύσετε την ανίσωση $f(2x - 1) > 2f(x)$

28.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 1$ και η εξίσωση f(x)=0 (1).

Α) Να αποδείξετε ότι η (1) έχει δύο άνισες ρίζες x_1, x_2.

Β)Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $\mathrm{A} = \dfrac{2}{x_1} + \dfrac{2}{x_2}$, $\mathrm{B} = x_1^2 + x_2^2$ και $\Gamma = |x_1 - x_2|$

Γ)Να βρείτε τα σημεια στα οποια η ευθεία Αx+Βy+Γ=0 τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

Δ)Αν οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 5\beta x + 6\gamma = 0$ είναι κατά μια μονάδα μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες ρίζες της (1) να βρείτε τους αριθμούς β,γ.

Ε)Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt{f(0)+2}}{\sqrt{5} - \sqrt{f(0)+2}} + \dfrac{\sqrt{f(-1)}}{\sqrt{f(-1)} + \sqrt{3}} = 4$

29.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1$,$x \in \mathbb{R}$

Α)Να λύσετε την εξίσωση : $f(x-1) + f(2x) - 3f(2) = -5$

Β)Να λύσετε την εξίσωση : $\left|f(x)-x^2\right|=2|x-1|-3$

Γ)Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)>x-4f(1)$

Δ)Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα x΄x.

Ε)Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(2)+2}-\sqrt{f(2)}}+\dfrac{\sqrt{f(2)+2}}{\sqrt{f(2)+2}+\sqrt{f(2)}}=4$

30.Έστω Α και Β δυο απλά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει ότι: $4\left(P(A)\right)^2+9\left(P(B)\right)^2+2\le 4P(A)+6P(B)$.

i)Να δείξετε ότι $P(A)=\dfrac{1}{2}$ και $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$

ii) Αν επιπλέον ισχύει $P(B-A)=\dfrac{6^{20}\cdot 9^6}{8^7\cdot 27^{11}}$ και να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα Α και Β.

iii)Αν $\mathrm{N}(\mathrm{A})=\alpha_{2014}$, όπου α_{2014} ο 2014 όρος αριθμητικής προόδου με δεύτερο όρο $\alpha_2=-3998$ και διαφορά $\omega=2$, να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

31.Δίνονται οι παραστάσεις:

$\mathrm{K}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$,$\Lambda=\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt[4]{16}}}}$

$\mathrm{M}=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+12x+36}-6$,$-2<x<3$

Α)Να δείξετε ότι :Κ=5 , Λ=4 , Μ=3

Β)Θεωρούμε ενδεχόμενα Α,Β ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν : $P(A)=\dfrac{1}{K}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{\Lambda}$ $\mathrm{P}(\Gamma)=\dfrac{2}{\mathrm{M}}$. Να αποδείξετε ότι :

$\alpha)P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le\dfrac{1}{5}$

Α) $\beta)\dfrac{2}{3}\le\mathrm{P}(\mathrm{B}\cup\Gamma)\le\dfrac{11}{12}$

$\gamma)\dfrac{5}{12}\le\mathrm{P}(\Gamma-\mathrm{B})\le\dfrac{2}{3}$

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+ax+2$ για την οποία ισχύει ότι οι αριθμοί $f(0), f(-2), f(-3)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν)

i) Να δείξετε ότι α=1

ii) Αν επιπλέον ο αριθμός f(0) είναι ο 4ος της γεωμετρικής προόδου (α_ν) , να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και στη συνέχεια τον πρώτο όρο της που είναι μεγαλύτερος του 512.

iii)Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία y=8.

iv)Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της f(x)=5 , να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$

33.Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με

$\alpha_4 + \alpha_{12} = \mu - 6$ και $\alpha_7 + \alpha_{19} = \mu - \mu^2$ όπου $\mu = \frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} + \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$

i)Να δείξετε ότι μ=6

ii)Να δείξετε ότι ω=-3 και α_1=21

iii)Να βρείτε τον όρο α_ν για τον οποίο ισχύει α_ν=ν.

34.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x-6| + a$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο (1,5)

i)Να αποδείξετε ότι α=2

ii)Να αποδείξετε ότι αν $x \geq 2$, $f(x) = 3x - 4$ και στη συνέχεια ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{f(x)} = 3x + 4$$

iii)Να αποδείξετε ότι αν $x \prec 2, f(x) = 8 - 3x$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -1$

35. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0,1,2,3,4\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + \frac{1}{4}}$ και $g(x) = x^2 + 3x + \mu^2$

i)Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(A \cap B), P(A-B)$ όπου Α και Β τα ενδεχόμενα:

- $A = \{\alpha \in \Omega / \eta \text{ f(x) έχει πεδίο ορισμού το R}\}$
- $B = \{\mu \in \Omega / \eta \text{ g(x) τέμνει τον άξονα y'y σε σημείο με θετική τεταγμένη}\}$

Αν επιπλέον , μ>0 , η g διέρχεται από το (0,1) και οι αριθμοί μ,3α,g(1) είναι με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου:

ii)Να δείξετε ότι α=μ=1

iii)Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

iv)Να λύσετε την εξίσωση : $|g(x) - 5| + |x^2 - 2f(0)| = P(\varnothing)$

v)Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 6 όρων της γεωμετρικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1 = f(0)$ και λ=-2g(-1)

vi)Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\Gamma = \{\nu \in \Omega / \alpha_\nu < 2\}$

36.Θεωρούμε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) και τις ευθείες για τις οποίες ισχύουν:

- $(\varepsilon_1): y=(a_7+5)x+a_{12}-a_{14}$
- $(\varepsilon_2): y=(15-a_{15})x$
- Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και ε_1 διέρχεται από το σημείο (3,2)

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1=-15$ και $\omega=2$.

ii)Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ε_1 με τους άξονες

iii) Έστω $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots A_{20}$ τα σημεία της ευθείας ε_1 με τετμημένες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{20}$ αντίστοιχα. Να βρείτε το άθροισμα των τεταγμένων των παραπάνω σημείων

37.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2x+6}$ και η αριθμητική πρόοδος (α_ν):=-10,-5,0,5,……

Α)Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

Β)Να βρείτε τον πρώτο όρο και την διαφορά ω της προόδου.

Γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $K=\sqrt{S_{25}+775}$

Δ)Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $f(-1), f(a_4), f(a_6)$ είναι διαδοχικοί όροι μιας άλλης αριθμητικής προόδου.

Ε)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2-S_{500}\cdot x-f(a_4)=0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες.

37.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-2\lambda x+\lambda^2}-\sqrt{x^2+2x+1}, \lambda>0$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0,1) . Δίνεται επίσης η αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω=3f(0), για την οποία ισχύει $S_{51}-S_{50}=134$

i)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και στη συνέχεια να δείξετε ότι λ=2.

ii)Να λύσετε την ανίσωση f(x)>0

iii)Να δείξετε ότι ο 1ος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=-16$.

iv)Αν $x\in(a_6,a_7)$ να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

v) Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=f\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

38.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

Β)Να λύσετε την εξίσωση $|f(x-2)|=2|f(x+1)|$

Γ)Να λύσετε την ανίσωση $\left(\dfrac{3}{f(x)}\right)^2+x>0$

Δ)Να αποδείξετε ότι:

i)f(-1)=3

$ii)\ \dfrac{1}{\left(2-\sqrt{f(-1)}\right)^2}-\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{f(-1)}\right)^2}=8\sqrt{3}$

39. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda(\lambda+3)=0 \quad (1)$

Α)Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις.

Β) Έστω S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της εξίσωσης (1). Αν ισχύει P-S=12 , να προσδιορίσετε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ)Για την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο β)ερώτημα τότε :

i)Να υπολογίσετε την παράσταση $A=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$.

ii)Να κατασκευάσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $x_1^2x_2$ και $x_2^2x_1$.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-2|-x}{x^2-2x+\lambda}$

Α)Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού λ , για τις οποίες η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Β)Αν λ=2, τότε:

i) Να λύσετε την ανίσωση : $|x-f(2)|<f(0)$

ii)Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+9f(0)\geq 6a$

iii)Να λύσετε την εξίσωση $\left|2|x|-f(0)\right|=3$

Γ)Αν (α_ν) γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1=\dfrac{3}{625}$ και $\alpha_6=15$ να βρείτε:

i)το λόγο της προόδου.

ii)Αν υπάρχει τιμή της συνάρτησης που να είναι ίση με τον όρο α_4.

41. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$

i)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii)Να απλοποιήσετε την συνάρτηση $h(x)=\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]^2\cdot\dfrac{1}{(4-x)^2}$ $,x\in(2,4)$

iii)Αν $h(x)=\dfrac{x-2}{4-x}$ να κατασκευάσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες

$x_1=\sqrt{h\left(\dfrac{7}{2}\right)-2}$ και $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{h\left(\dfrac{7}{2}\right)-2}}$

iv)Να βρείτε τον αριθμό $\alpha=\sqrt[4]{h\left(\frac{10}{3}\right)\sqrt[3]{h\left(\frac{10}{3}\right)\sqrt{\left(h\left(\frac{10}{3}\right)\right)^{7}}}}\cdot\sqrt[8]{8}$ και στη συνέχεια να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{3\sqrt{\alpha}+2}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

42.Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x)=x^2-(\lambda-2\mu)x+\lambda-1$ και $g(x)=\frac{4x^2-4x+1}{2\sqrt{f(x)-2}}$. Αν ισχύει ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $\frac{1}{2}$.

i)Να αποδείξετε ότι $\lambda=\frac{5}{4}$ και $\mu=\frac{1}{8}$

ii)Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x^2\right)=f(1)+2$

iii)Να δείξετε ότι $g(x)=\frac{(2x-1)^2}{|2x-1|-2}$ και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

iv)Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_g με την ευθεία y=1.

43.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{\left|x^3-2x^2+|a|x-6\right|}{x^2+3}, a\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(-1,3).

i)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι α=3 ή α=-3

ii)Να δείξετε ότι $f(x)=|x-2|$

iii)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2f\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+2=(x-2)^2$.

44.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\lambda x+\lambda-1$

Α)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

Β)Έστω x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $|x_1-x_2|=4$.

Γ)Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\left|x_1^2x_2+x_1x_2^2\right|<2$.

Δ)Για λ=3 να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες αληθεύει η σχέση $2\le f(x)\le 6$.

45.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x+k^2-2k+2, \quad k\in\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο Μ(α-β,5α) , όπου α, β αριθμοί για τους οποίους ισχύει $26\alpha^2-10\alpha-2\alpha\beta+\beta^2+1=0$.

i)Να δείξετε ότι $\alpha=\beta=\dfrac{1}{5}$ και στη συνέχεια ότι κ=1.

ii)Να λύσετε την εξίσωση $f(x-1)+f(2x)-2f(2)=-5$

iii)Να λύσετε την εξίσωση $\left|f(x)-x^2\right|=2|x-1|-3$

iv)Να λύσετε την εξίσωση $\left|x+f(f(0))\right|\cdot|x-2|=|4x-8|$

v)Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2-4x+f(2)+1}=f(-1)$.

vi)Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\succ 2x-f(1)$

vii)Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f τα οποία έχουν τεταγμένη ίση με 13.

viii)Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα x΄x.

ix)Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την φραφική παράσταση της g(x)=4x+7.

x)Αν η ευθεία h(x)=cx+d είναι παράλληλη στην ευθεία g και διέρχεται από το σημείο (f(0),2018) , να βρείτε τους αριθμούς c,d.

xi)Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(2)+2}-\sqrt{f(2)}}+\dfrac{\sqrt{f(2)+2}}{\sqrt{f(2)+2}+\sqrt{f(2)}}=4$

46.Έστω δ.χ που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα και Α,Β δύο υποσύνολα του με αντίστοιχες πιθανότητες P(A) , P(B) και $P(A-B)=\dfrac{1}{3}$

Δίνεται η εξίσωση $x^2+5x-1+4P(A)-4\left(P(A)\right)^2=0$

Α)Να αποδείξετε ότι έχει δύο άνισες ρίζες x_1,x_2 με $x_1<x_2$.

Β)Αν ο αριθμός x_1+x_2 επαληθεύει την εξίσωση τότε:

i)Να δείξετε ότι $x_2=0$

ii)Να αποδείξετε ότι $P(A)=\dfrac{1}{2}$

iii)Να αποδείξετε ότι $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

47.Δίνεται η εξίσωση : $x^2-(\lambda+3)x-\lambda^2=0$

Α.Να δείξετε ότι έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2 και στη συνέχεια να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $x_1 \cdot x_2$, x_1+x_2 , $x_1^2+x_2^2$

Β.Για τις διάφορες τιμές του λ ,να λύσετε την εξίσωση $x_1 \cdot x_2 \cdot x - x_1 = x_2 - 9x$, ως προς x.

Γ. Για την τιμή του λ , για την οποία η εξίσωση του ερωτήματος β ε.ιναι αόριστη, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x_1+x_2 , $-x_1 \cdot x_2$, $x_1^2+x_2^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.