

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν :

$$|\vec{a}|=4, |\vec{\beta}|=5 \text{ και } \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{\beta}=\frac{5}{8}\vec{a}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 10$

β) Να βρείτε τη γωνία των \vec{a} και $\vec{\beta}$.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = \vec{a} - \vec{\beta}$.

δ) Αν το διάνυσμα $\vec{v} = (\vec{a} \cdot \vec{\beta})\vec{a} - \kappa\vec{\beta}, \kappa \in \mathbb{R}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\beta}$ να βρείτε την τιμή του κ .

(Ο.Ε.Φ.Ε 2004)

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν

$$\vec{a} = (1, 8 - \vec{a} \cdot \vec{\beta}) \text{ και } \vec{\beta} = \left(2, \frac{1}{\sqrt{5}}|\vec{\beta}| \right)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\beta}| = \sqrt{5}$

ii) $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 5$

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$

γ) i) Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{a} = \vec{\beta}$.

ii) Να αναλύσετε το διάνυσμα \vec{a} σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\beta}$.

(Ο.Ε.Φ.Ε 2005)

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με

$$|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}. \text{ Έστω τρίγωνο } AB\Gamma \text{ και } AM$$

διάμεσος του για το οποίο ισχύουν:

$$\vec{AB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} \text{ και } \vec{AM} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) Να εκφράσετε το \vec{AG} ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου \vec{AM} .

δ) Να αποδείξετε ότι η γωνία των \vec{AM} και $\vec{\alpha}$ είναι ίση με $\frac{\pi}{6}$.

(Ο.Ε.Φ.Ε 2006)

4. Έστω τα σημεία $A(-1, \psi)$ και $B(2\chi, \psi)$ με $\chi, \psi \in \mathbb{R}$ του καρτεσιανού επιπέδου $O\chi\psi$.

A. Αν είναι $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(\chi, \psi)$ ανήκουν στην παραβολή $C_1: \psi^2 = 2\chi$, της οποίας να βρείτε την εστία E και την διευθετούσα δ .

B. Αν ισχύει $3\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 = 15$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(\chi, \psi)$ ανήκουν στο κύκλο $C_2: x^2 + \psi^2 = 3$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ. Να αποδείξετε ότι :

α) Τα σημεία των C_1 και C_2 είναι το $K(1, \sqrt{2})$ και το $\Lambda(1, -\sqrt{2})$

β) Η εφαπτομένη της C_1 στο K είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του C_2 στο Λ .

(Ο.Ε.Φ.Ε 2008)

5. Στο καρτεσιανό επίπεδο $O\chi\psi$ δίνονται τα σημεία $A(2, 0)$, $B(4, 5)$, $\Gamma(6, \kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R} - \{10\}$.

α) Να δείξετε ότι:

i) Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

ii) Η εξίσωση της ευθείας της διαμέσου (ϵ) που φέρουμε από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\chi=4$.

β) Να προσδιορίσετε την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ, αν το εμβαδό του είναι $(ΑΒΓ)=8$ τετρ. Μονάδες.

γ) Για $\kappa=2$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας του ύψους (η) που φέρουμε από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ, καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου Δ στο οποίο τέμνονται οι ευθείες (ϵ) και (η).

(Ο.Ε.Φ.Ε 2008)

6. Δίνονται τα σημεία Α(1,0) Β(1,1) Γ(-1,2)

Να βρείτε:

i) $|\overline{ΑΒ}|$ και το $|\overline{ΑΓ}|$

ii) την γωνία Α.

iii) το ύψος από την κορυφή Γ.

iv) το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=3$ και

$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Θεωρώ το τρίγωνο ΑΒΓ με $\overline{ΑΒ} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και

$\overline{ΑΜ} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, όπου ΑΜ διάμεσος.

i) Να βρεθεί το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

ii) Να εκφράσετε το $\overline{ΑΓ}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

iv) Να βρεθεί το μήκος του $\overline{ΑΜ}$ και να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει το $\overline{ΑΜ}$ με το $\vec{\alpha}$.

8. Δίνεται η $C: y^2=4x$ και $M(1,-2)$

i) Ναδειχτεί ότι $M \in C$ και να βρεθεί η εφαπτομένη του C στο M.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΕΜ όπου Ε η εστία της C και να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται στον $y'y$ και να βρεθεί το σημείο επαφής.

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με εκκεντρότητα $=2$ και κορυφές A, A' όπου A' το συμμετρικό του A ως προς O .

9.Α. Θεωρούμε στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τη γραμμή με εξίσωση $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η προηγούμενη εξίσωση παριστάνει κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $O(0,0)$ και $A(-6,8)$ είναι τα άκρα μιας διαμέτρου του κύκλου.

Β. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_\alpha: \alpha x - y = 0 \quad \text{και} \quad \zeta_\alpha: \alpha x + y = 2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, οι ευθείες ε_α διέρχονται από σταθερό σημείο A και οι ευθείες ζ_α διέρχονται από σταθερό σημείο B , τα οποία και να προσδιορίσετε.
β) Αν $M(x,y)$ είναι το σημείο τομής των ε_α και ζ_α να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το M κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

10. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y - \lambda^2 - 2\lambda - \gamma = 0$, όπου λ πραγματικός και γ πραγματική σταθερά.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.
β) Αν $\gamma = -1$, να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο.
γ) Αν $\gamma \neq -1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μία ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση.

11. Θεωρούμε την εξίσωση: $(2\lambda - 1)x + (3\lambda + 4)y - 8\lambda - 7 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

- i) Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία.
ii) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η ευθεία διέρχεται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρείτε.

iii) Να βρείτε τις τιμές του λ , όταν η παραπάνω ευθεία εφάπτεται στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

12. Δίνονται οι ευθείες $(\epsilon_1) y=2x+1$ και $(\epsilon_2):y=2x-1$.

A.i) Να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που ισαπέχει από τις ϵ_1 και ϵ_2 .

B.i) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται των ευθειών $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $(\eta):x+y=3$.

ii) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που βρήκατε, οι οποίες είναι κάθετες στις $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$.

13. Δίνονται τα σημεία $A(a,0)$ και $\Gamma(2a,3a)$, $a \neq 0$.

Η κάθετη ευθεία στην $A\Gamma$ στο A τέμνει την $(\epsilon):x+2a=0$ στο σημείο B .

i) Βρείτε τις συντεταγμένες του B .

ii) Να δείξετε ότι το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

iii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο A και ακτίνα AB

Π.14. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ κορυφών $A(1,1), B(-1,2)$ και $\Gamma(3,1)$.

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην $B\Gamma$.

Π.15. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία $(\epsilon): y = x - 1$.

A) να δείξετε ότι η (ϵ) περνά από την εστία της παραβολής.

B) να βρείτε τα κοινά σημεία A, B της (ϵ) και της παραβολής.

Γ) να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής στα A, B είναι κάθετες.

16. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

- A. i) Να γράψετε τον κύκλο στη μορφή $(x-a)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$. και να βρείτε κέντρο και ακτίνα.
 ii) Να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπεται στον $\chi\chi$.
 B. i) Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο P, του κέντρου του κύκλου ως προς την ευθεία $y=x$.
 ii) Αν $P(2,1)$ το προηγούμενο σημείο, δείξτε ότι το P εσωτερικό του κύκλου.
 Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $P(2,1)$ και τέμνει τον κύκλο στα A,B ώστε το P να είναι μέσο της χορδής AB

17. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\overline{AB} = (4,3)$ και $\overline{A\Gamma} = (1,7)$

- i) Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\overline{B\Gamma}$.
 ii) Να δείξετε ότι το $\overline{A\Gamma}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overline{B\Delta}$ και να προσδιορίσετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.
 iii) Αν το σημείο A κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$ να αποδείξετε ότι και το κέντρο K του $AB\Gamma\Delta$ κινείται σε ορισμένο κύκλο.

Π.18. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x\eta\mu\theta - 6y\sigma\upsilon\nu\theta + 4\eta\mu^2\theta = 0, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Να αποδείξετε ότι:

- A) η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (C) του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
 B) Ο κύκλος (C) εφάπτεται στην ευθεία $y=0$.
 Γ) Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε μια έλλειψη της οποίας να βρεθούν τα μήκη των αξόνων, οι εστίες και η εκκεντρότητα.

Π.19. Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ και η παραβολή $C_2: y^2 = 4x$

- A) Να βρεθεί το κέντρο K και η ακτίνα ρ του κύκλου C_1 .
 B) Να βρεθούν τα κοινά σημεία A, B του κύκλου και της Παραβολής.
 Γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής στα σημεία της A, B
 Δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται στον κύκλο.

20. Η ευθεία $|\vec{a}|^2 x + |\vec{\beta}|^2 y = \vec{a} \cdot \vec{\beta}$ με $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τέμνει τους άξονες yy' και $x'x$ ορθοκανονικού συστήματος στα σημεία A και B αντίστοιχα. Αν τα σημεία αυτά είναι εστίες των παραβολών $C_1: x^2 = 2p_1 y$ και $C_2: y^2 = 2p_2 x$ με $p_1 p_2 = 4$ να δειχτεί ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

21. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ και η παραβολή $y^2 = 16x$.

Να βρεθούν :

- οι εστίες της έλλειψης και της παραβολής
- Να βρεθούν οι εφαπτομένες της παραβολής στα σημεία $M(4,8)$ και $M'(4,-8)$
- Να δειχτεί ότι $\vec{E'M} \cdot \vec{E'M'} = 0$

22. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = 4$ και $C_2: x^2 + y^2 = 9$. Από τυχαίο σημείο $M(\alpha, \beta)$ του κύκλου C_2 φέρνουμε εφαπτομένες ε_1 και ε_2 προς τον C_1 με A, B αντίστοιχα σημεία επαφής.

- Δείξτε ότι η ευθεία AB έχει εξίσωση $ax + \beta y = 4$
- Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου MAB .
- Να υπολογιστεί η εφαπτομένη της AMB .

23. Δίνονται οι ευθεία $\varepsilon: ax - 2y + 1 = 0$ και ο κύκλος

$$C: x^2 + (y - a)^2 = 4, a \in \mathbb{R}.$$

- Δείξτε ότι η ευθεία ε διέρχεται από σταθερό σημείο για

κάθε $a \in \mathbb{R}$

- ii) Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η ε να τέμνει τον κύκλο C . Για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ η ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου;
- iii) Αν $a=1$ να υπολογιστεί το εμβαδό του τριγώνου με κορυφές το κέντρο του κύκλου και τα σημεία τομής της ε με τον C .

24. Δίνονται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$ και η έλλειψη

$$C': x^2 + 4y^2 = 4$$

- i) Ναδειχτεί ότι οι εφαπτομένες που φέρονται από τις εστίες της έλλειψης προς τον κύκλο σχηματίζουν ρόμβο.
- ii) Αν E_1 είναι το εμβαδό του παραπάνω ρόμβου και E_2 το εμβαδό του ορθογωνίου που σχηματίζεται από τα σημεία επαφής ναδειχτεί ότι $E_1 = \frac{9}{4} E_2$.

25. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 2)$ και $\vec{b} = (\lambda, -1 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

και η εξίσωση :

$$|\vec{a} + \vec{b}|x + |\vec{a} - \vec{b}|y + \sqrt{2}\vec{a}\vec{b} = 0 \quad (1)$$

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία
- β) Αν ε είναι η ευθεία που ορίζεται από την (1) και είναι παράλληλη στην $(\eta): x + y + 5 = 0$ να βρείτε
- i) το διάνυσμα \vec{b}
- ii) την εξίσωση της ε .

26. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 + 9y^2 - 12xy - 36 = 0$ (1)

A. Ναδειχτεί ότι τα σημεία που επαληθεύουν την εξίσωση (1) ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 .

B. Ναδειχτεί ότι η μεσοπαράλληλη ευθεία των ε_1 και ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

27. Δίνονται οι κύκλοι:

$$C_1: x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0 \quad \text{και} \quad C_2: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$$

A. Δείξτε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 είναι ίσοι και ότι

τέμνονται σε δύο σημεία A, B .

Β. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας AB , κοινής χορδής των δύο κύκλων

Γ. Να βρεθεί σημείο M της ευθείας AB ώστε η γωνία $K\Lambda M$, με K, Λ τα κέντρα των δύο κύκλων να είναι ορθή.

28. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ και ο κύκλος

$$C_1: x^2 + y^2 - 6y - 91 = 0$$

i) Να βρείτε τις εστίες της C και το κέντρο του C_1 . Να δείξετε ότι μια από τις εστίες της C ταυτίζεται με το κέντρο του C_1 .

ii) Να δείξετε ότι οι κύκλοι που εφάπτονται εσωτερικά του C_1 και έχουν τα κέντρα τους στην C διέρχονται από σταθερό σημείο.

29. Α. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η υπερβολή

$$C_1: \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta} = \alpha - \beta, \quad \alpha > \beta > 0$$

Να δείξετε ότι :

i) Έχουν τις ίδιες εστίες η έλλειψη και η υπερβολή

ii) Αν ε η εκκεντρότητα της C και ε_1 η εκκεντρότητα της C_1 να δείξετε ότι : $\varepsilon^2 = \varepsilon_1^2 (2 - \varepsilon_1^2)$

Β. Αν $M(x_0, y_0)$ είναι ένα κοινό σημείο τους να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης και της υπερβολής στο M είναι κάθετες.

30. Δίνεται η έλλειψη $C: 3x^2 + 4y^2 = 12$ και η εξίσωση

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x + 2y = \alpha - 1981$$

Για ποιες τιμές του α η C_1 παριστάνει κύκλο.

Για ποια τιμή του α ο κύκλος C_1 διέρχεται από την εστία $E'(-\gamma, 0)$ της έλλειψης C .

Να βρείτε την τιμή του a ώστε η εφαπτομένη της έλλειψης C στο $M(1, \frac{3}{2})$ να εφάπτεται του κύκλου C_1

31. Δίνεται η εξίσωση :

$$C: \frac{x^2}{10+8\cos\theta} + \frac{y^2}{10-8\cos\theta} = 1, \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

Να βρεθεί τι παριστάνει η C για τις διάφορες τιμές του θ .

Να δείξετε ότι το σημείο $M(|\vec{a} + 2\vec{\beta}|, |\vec{a} - 2\vec{\beta}|)$ με $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \theta$, ανήκει στην C .

Αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C στο M , να βρεθεί η συγκεκριμένη εξίσωση της C ώστε ο λ^2 να γίνεται μέγιστος.

32. Δίνεται η υπερβολή $C: x^2 - 3y^2 = 3$ και το σημείο της $M(3, \sqrt{2})$

Να βρεθεί το συμμετρικό της εστίας E της υπερβολής ως προς την εφαπτομένη της υπερβολής στο M .

Να δείξετε ότι το συμμετρικό της εστίας E βρίσκονται σε κύκλο που έχει κέντρο την άλλη εστία E' και ακτίνα $2\sqrt{3}$.

33. Έστω η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$ και το σημείο $K(0, 2b)$.

Μια μεταβλητή ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σταθερό σημείο K και τέμνει της εφαπτομένες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονα της στα σημεία M και N .

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο MN ως συνάρτηση του λ

β) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο κύκλος με διάμετρο MN να διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

34. Έστω η υπερβολή $C: x^2 - \psi^2 = a^2$ και το σημείο της $M(x_0, \psi_0)$.
 Η εφαπτομένη (ε) της υπερβολής στο σημείο M τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία Γ και Δ .
 Να αποδειχθεί ότι : i) $(ΟΔ)(ΟΓ) = 2a^2$ ii) Το M είναι μέσο του $\Gamma\Delta$ iii) $Εμβ(ΟΓ\Delta) = a^2$
35. Αν οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{\psi^2}{\alpha^2} = 1$ $\alpha > \beta > 0$
 τέμνονται σε τέσσερα διαφορετικά σημεία, να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά είναι ομοκυκλικά.
36. Δίνεται η παραβολή $C: \psi^2 = 4x$ και τα σημεία της $M(t^2, 2t)$, $P(\mu^2, 2\mu)$, $t \neq \mu, t \in \mathbb{R}^*$. Οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία M και P τέμνονται στο σημείο T . Αν η ευθεία MP διέρχεται από το σημείο $\Sigma(4, 0)$, να αποδειχθεί ότι :
 α) $t\mu = -4$ β) Το T κινείται σε σταθερή ευθεία.
37. Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων της έλλειψης $C_1: x^2 + 2\psi^2 = 2$ και της παραβολής $C_2: \psi^2 = 4x$.
38. Έστω η παραβολή $C: \psi^2 = 4x$ και τα σημεία της $A(t^2, 2t)$, $B(\mu^2, 2\mu)$. Αν η ευθεία AB σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30° , να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M της χορδής AB .
39. Έστω η παραβολή $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) και η εφαπτομένη της (ε) σ' ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ αυτής, η οποία τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο B .
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A και B ως συνάρτηση των p και y_1 .
 β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που γράφεται με διάμετρο την AB διέρχεται από την εστία της παραβολής.

40.Α. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη και η εκκεντρότητα της είναι ίση με 2.

Β. Στην υπερβολή $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ θεωρούμε την εφαπτομένη στο τυχαίο σημείο της Μ και την κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο Μ.

Αν η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο ρ και η κάθετη στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι $\overline{ΟΡ} \cdot \overline{ΟΚ} = 16$.

41. Να αποδείξετε ότι η παραβολή $C_1 : y^2 = 2px$ και η έλλειψη

$$C_2 : \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \alpha > \beta, \text{ τέμνονται κάθετα αν και μόνο αν η}$$

$$\text{εκκεντρότητα της έλλειψης είναι } \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

42. Μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x τέμνει την ισοσκελή υπερβολή $C : x^2 - y^2 = a^2$ στα σημεία Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος διαμέτρου ΓΔ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής.

43. Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 4x$ και η ευθεία $\varepsilon : y = x + 2008$.

Να βρείτε:

i) την εστία Ε και την διευθετούσα δ της παραβολής

ii) την εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε)

iii) την εξίσωση της έλλειψης της οποίας η μία εστία συμπίπτει με την εστία της παραβολής και έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{1}{2}$

iv) την εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής της οποίας η μία εστία συμπίπτει με την εστία της παραβολής.

44. Έστω τα σημεία $A(0, \alpha)$, $E(0, 2\alpha)$ με $\alpha > 0$ και τα συμμετρικά τους ως προς την αρχή των αξόνων A' και E' αντίστοιχα. Να βρείτε :
- α) i) την εξίσωση του κύκλου (C) με διάμετρο AA' .
 ii) τις εξισώσεις των εφαπτομένων ϵ_1 και ϵ_2 του κύκλου (C) που διέρχονται από το σημείο E και να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.
- β) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες ϵ_1 και ϵ_2 του κύκλου (C) και οι ασύμπτωτες της υπερβολής με εστίες τα σημεία E και E' και κορυφές τα σημεία A και A' σχηματίζουν δυο ζεύγη κάθετων ευθειών.
45. α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C που έχει άξονα συμμετρίας τον $\chi\chi$, κορυφή την αρχή των αξόνων και διευθετούσα $\delta = -1$.
- β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ϵ) της παραβολής C η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: 4x + 3y + 1 = 0$ έχει εξίσωση $\epsilon: y = \frac{3}{4}x + \frac{4}{3}$.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην (ϵ).
- δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής και του κύκλου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Μπάρλας Αναστάσιος , Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική

2.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Τραγανίτης Α., Εκδόσεις Σαββάλας

3.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Χ&Ι Στεργίου , Χ. Νάκης , Εκδόσεις Σαββάλας

4.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ.Τζουβάρας,Κ.Τζιρώνης ,Εκδόσεις Σαββάλας

5.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Κωστα Κυριακόπουλου ,Εκδόσεις Πατάκη

6.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Ηλιόπουλος Γιάννης ,Εκδόσεις Ζήτη

Επίσης από τις παρακάτω ηλεκτρονικές διευθύνσεις:

1.<http://users.sch.gr/fergadioti/>2.www.oktonia.com3.www.pi-schools.gr/lessons/mathematics/4.www.ems.gr

Σε όποιες ασκήσεις μπροστά έχει το γράμμα Π σημαίνει ότι οι ασκήσεις αυτές έχουν μπει στις Προαγωγικές εξετάσεις στα λύκεια της Στερεάς Ελλάδας και είναι στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

<http://stellad.pde.sc>