

Τα παρακάτω θέματα αποτελούν ασκήσεις προαγωγικών εξετάσεων της Γ' Γυμνασίου σε κάποια σχολεία της Ελλάδας.

1. Δίνεται η παράσταση: $A = (3x+1)^2 + (x-3)^2 - (3x-1)(3x+1)$

α) Να αποδείξετε ότι $A = x^2 + 11$

β) Να λύσετε την εξίσωση $A = 12x$

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\frac{A-12}{x-1}$

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (2x+1)^2 + (2-x)(2+x) - x(2x+3) - 11$

α) Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^2 + x - 6$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + x - 6$

3. Α. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{3x+2y}{2} - \frac{x+5}{3} = \frac{y-5}{4} \\ 4x-5y=9 \end{cases}$$

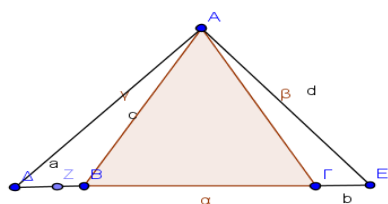
Β. Αν (x, y) είναι η λύση του παραπάνω συστήματος, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{2012}\right)^x \left(\frac{1}{2012}\right)^y}$$

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στη βάση $B\Gamma$ του τριγώνου παίρνουμε σημεία Δ και E έτσι ώστε $B\Delta = E\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα. Τι είδους τρίγωνο είναι το $A\Delta E$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Β. Αν M είναι το μέσο του τμήματος ΔE , να αποδείξετε ότι το M ισαπέχει από τις πλευρές $A\Delta$ και $A\Gamma$ του τριγώνου $A\Delta E$.



5. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 3(x+y)+2=2(y+6) \\ \frac{2x-y}{5} + \frac{y-5}{4} = 0 \end{cases}$$

6. Δίνεται το πολυώνυμο : $A(x) = (3-2x)^2 + (3-x)(3+x) - 2x(x-1) + 6$

α) Να δείξετε ότι : $A(x) = x^2 - 10x + 24$

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 10x + 24 = 0$

γ) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $B(x) = 3x^2 - 18x$

δ) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $A(x) = x^2 - 10x + 24$

ε) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\Gamma(x) = \frac{x^2 - 10x + 24}{3x^2 - 18x}$ για τις τιμές του x που έχει νόημα.

7. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 1 - \frac{x-5}{x-2}, \quad x \neq 2 \quad \text{και} \quad B = \frac{2x^2+x}{x-3} : \frac{x^2+3x}{x^2-9} \quad \text{με} \quad x \neq 0, x \neq -3, x \neq 3$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \frac{3}{x-2}$

β) Να αποδείξετε ότι $B = 2x + 1$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x ώστε να ισχύει $A = B$.

8. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = (2x-1)^2 - (x-2)(x+2) + 2(x-3)$$

$$Q(x) = (2\alpha - \beta) \cdot x^2 + (\alpha + 3\beta) \cdot x - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι : $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$

β) Αν $P(x) = Q(x)$ να υπολογίσετε τα α και β .

9. Δίνεται η παράσταση :

$$A = \left(\frac{2x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 3} : \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} \right) - \frac{1}{x-1}$$

α) Να λύσετε την εξίσωση : $2x^2 - 3x - 2 = 0$

β) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

$$2x^2 - 3x - 2, \quad 3x^2 - 3, \quad x^2 - x - 2, \quad x^2 + 2x + 1$$

γ) Να αποδείξετε ότι $A = \frac{2}{3}$.

10. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = x^3 - 5x^2 + 2x - 10 \quad \text{και} \quad B = 2x^2 - 50$$

α) Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις A και B.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα $\frac{A}{B}$.

γ) Να αποδειχθεί ότι $\frac{A}{B} = \frac{x^2 + 2}{2(x+5)}$ $x \neq 5$ και $x \neq -5$

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $\frac{A}{B} = 1$.

11. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ \frac{x - y}{3} = \frac{2x + y}{7} - \frac{4}{3} \end{cases}$$

12. Θεωρούμε τις παραστάσεις:

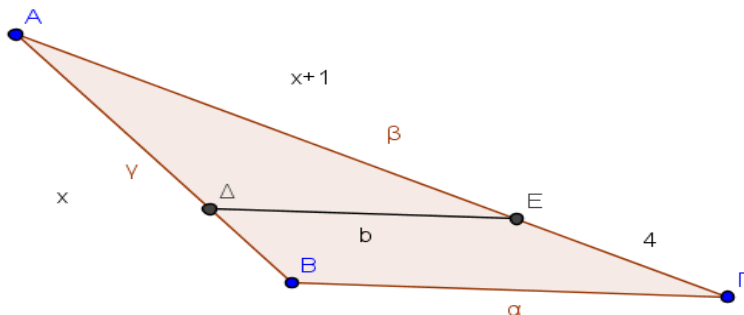
$$A = (x - 3y)^2 + (2y + 3x)(3x - 2y) - (3x - y)^2 \quad \text{και}$$

$$B = 2x - y - x^2 - 4y^2$$

α) Να αποδείξετε ότι: $A + B = 2x - y$

β) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} A + B = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

13. Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$, $AB = x$, $A\Delta = 3$, $\Delta E = x + 1$, $E\Gamma = 4$. Να υπολογιστεί το x.



14. Να λυθεί η εξίσωση $:(3x+1)^2 - 3x(x-1) + 1 = 4x$

15. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{2x+3y}{5} - \frac{x-2y}{2} = \frac{3}{10} - 3x \\ 2(x+4y) - 3y = 4x + 12 \end{cases}$$

16. Αν για την **αμβλεία** γωνία ω ισχύει: $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ να αποδείξετε

ότι:

A. $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$

B. $\epsilon\phi\omega = -\frac{4}{5}$

Γ. $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu 120^\circ}{\epsilon\phi\omega + \epsilon\phi 135^\circ} = \frac{3}{70}$

17. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και οι διάμεσοι ΒΔ και ΓΕ. Αν Κ είναι το σημείο τομής των διαμέσων, να αποδείξετε ότι:

A. τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα

B. το τρίγωνο ΒΓΚ είναι ισοσκελές.

18. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$A(x) = 2x(3x-1) - (x-1) \cdot (1-x) - 3x^2 - 1$$

$$B(x) = (3x-2)^2 - (2x-1)(4x-3)$$

A. Να δείξετε ότι $A(x) = 2x^2 - 2x$ και $B(x) = x^2 - 2x + 1$

B. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $A(x)$ και $B(x)$.

Γ. Να βρείτε τις τιμές του x που ορίζεται η αλγεβρική παράσταση $\Gamma(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ και μετά να απλοποιήσετε την

αλγεβρική παράσταση $\Gamma(x)$.

19. Αν είναι $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$ και $6\eta\mu x - 3 = 0$, να υπολογίσετε την γωνία x .

20. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1, -6)$ και $B(3, -2)$

21. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{2x+11}{2x+8} - \frac{4}{x^2-16} = \frac{x-5}{2x-8}$$

22. Να λύσετε την κλασματική εξίσωση:

$$\frac{2x}{x-2} - \frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$$

23. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A = 2\eta\mu\omega + 4\sigma\upsilon\nu\omega + \epsilon\phi\omega$

24. Α. Να δείξετε ότι η παράσταση

$$B = 2x(3-x) - (x-1)^2 + (x+1)(4x+1) - 14x \text{ είναι ίση με } x^2 - x$$

Β. Να λυθεί η εξίσωση $B=2$.

25. Δίνονται τα συστήματα

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 3(2x-y) - 2x - 3(y-1) = -1 \\ 5x - 2y = 4x - 2 \end{cases} \quad (\Sigma_2) \begin{cases} 1006x - 2012y = -2012 \\ 1008x - 2y = 2012 \end{cases}$$

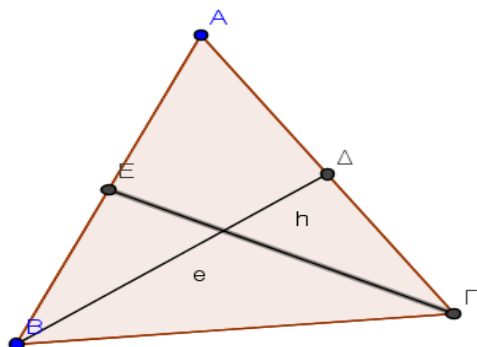
Α. Να λύσετε το (Σ_1) .

Β. Να εξετάσετε αν η λύση του (Σ_1) είναι και λύση του (Σ_2)

26. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με $AB=AG$ και $B\Delta, \Gamma\epsilon$ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών B και Γ αντίστοιχα.

Α. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $\Gamma\Delta B$ είναι ίσα.

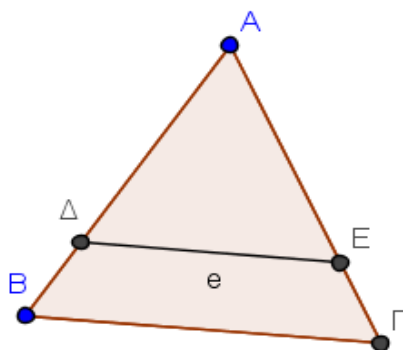
Β. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι $B\Delta$ και $\Gamma\epsilon$ είναι ίσες.



27. Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ//ΒΓ και ΑΔ=6 , ΔΒ=4 , ΔΕ=9 και ΒΓ=χ+1.

Α. Να δειχτεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.

Β. Να υπολογιστεί το χ .



28. Αν $0^\circ < \omega < 180^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$ να υπολογιστούν

Α. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

Β. Η τιμή της παράστασης

$$A = \frac{5\eta\mu\omega - 3\varepsilon\phi\omega}{10\sigma\upsilon\nu\omega} + \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2(180^\circ - \omega)$$

29. Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $(\eta\mu\omega - 4)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 13$

Α. Να βρείτε το $\eta\mu\omega$.

Β. Αν το ημίτονο της γωνίας ω είναι $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$

Ι) Να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και την $\varepsilon\phi\omega$

ΙΙ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$K = 2\eta\mu(180^\circ - \omega) + \frac{4}{\sqrt{3}}\sigma\upsilon\nu\omega - \sqrt{3}\varepsilon\phi(180^\circ - \omega)$$

30. Αν γνωρίζετε ότι $90^\circ < \omega < 180^\circ$ και $\eta\mu\omega = \frac{1}{3}$, τότε

Α. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω

Β. Να αποδείξετε ότι: $4\sqrt{2}\varepsilon\phi\omega + 2\sigma\upsilon\nu^2\omega + 2\eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu 90^\circ$

31. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} 3(x+2y)-2(x-1)=-7 \\ \frac{x-1}{3}-\frac{3-y}{4}=-\frac{7}{12} \end{cases}$$

A. Να δείξετε ότι το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\begin{cases} x+6y=-9 \\ 4x+3y=6 \end{cases}$

B. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα

32. Δίνεται η εξίσωση :

$$1-\frac{x+2}{x-2}+\frac{x+2}{x}=\frac{x-10}{x^2-2x}$$

A. Να βρείτε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών της.

B. Να βρείτε ποιοι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για το x , ώστε να έχει νόημα η παραπάνω εξίσωση.

Γ. Να αποδείξετε ότι εφόσον ισχύουν οι παραπάνω περιορισμοί, η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $x^2-5x+6=0$

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $x^2-5x+6=0$

Ε. Ποιές από τις λύσεις της εξίσωσης του (Δ) ερωτήματος είναι λύσεις και της αρχικής κλασματικής εξίσωσης;

33. A. Να λυθεί η παρακάτω κλασματική εξίσωση:

$$\frac{x+1}{x^2+2x}+\frac{x-3}{x^2-2x}=\frac{4}{x^2-4}$$

B. Αν α η μεγαλύτερη λύση της παραπάνω εξίσωσης και β η μικρότερη λύση να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} ax+\beta y=4 \\ x-\alpha\beta y=1 \end{cases}$$

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x,y)$ όπου (x,y) η λύση του παραπάνω συστήματος και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

34. A. Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{x-2}{x+5}+\frac{2x+1}{11-x}=1$

B. Αν α είναι η μικρότερη και β η μεγαλύτερη τιμή της παραπάνω εξίσωσης, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση

$$(\beta+1)x^2y^2 - ayx - (a+\beta)$$

35. Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} 2ax - 3y\beta = \alpha + 1 \\ \beta y - \beta + 3\alpha x = 0 \end{cases}$$

Αν γνωρίζετε ότι μια λύση του συστήματος ως προς x και y είναι $(1, -2)$ να υπολογίσετε τις τιμές των α και β .

36. Α. Να λύσετε την εξίσωση : $2x^2(x-3) - x(x+1) = x(2x^2 + x - 5)$

Β. Αν α, β οι ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης με $\alpha < \beta$, να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} (a+2)x - 5y = 16 \\ x + 6\beta y = -3 \end{cases}$$

37. Α. Να λύσετε την εξίσωση : $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

Β. Αν το ημίτονο της οξείας γωνίας ω ισούται με μια από τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να υπολογίσετε τη γωνία καθώς και το συνημίτονο και την εφαπτομένη της ίδιας γωνίας.

38. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ φέρνουμε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ του τριγώνου τα οποία τέμνονται στο Z .

Α. Να δείξετε ότι $BE = \Gamma\Delta$

Β. Να αποδείξετε ότι η AZ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$.

39. Δίνονται οι κλασματικές παραστάσεις:

$$A = \frac{x-7}{x^2-9} \quad B = \frac{x-5}{x^2-3x} \quad \Gamma = \frac{1}{x}$$

Α. Να βρείτε για ποιες τιμές των μεταβλητών x , ορίζεται η κάθε μια από τις παραπάνω παραστάσεις.

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x-7}{x^2-9} = \frac{x-5}{x^2-3x} - \frac{1}{x}$

40. Έστω γωνία ω ($90^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$) ώστε να ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{1}{3}$:

Α. Να βρεθούν το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\epsilon\phi\omega$

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$2014 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega + \sqrt{32} \cdot \epsilon\phi\omega + 2014 \cdot \eta\mu^2\omega = 2013 - (\eta\mu 90^\circ)^{2013 \cdot \sigma\upsilon\nu 90^\circ}$$