

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

- Τι ονομάζουμε εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού;
- Εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού με ένα άγνωστο ονομάζουμε κάθε εξίσωση που γράφεται ή μπορεί να γραφεί στη μορφή  $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$   
π.χ  $3x^2 - 5x + 6 = 0$
- Τι ονομάζουμε εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού ελλιπούς μορφής;
- Εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού ελλιπούς μορφής ονομάζεται η εξίσωση  $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$  και  $\beta=0$  ή  $\gamma=0$

Επίλυση εξισώσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού.

- Αν  $\beta=0$  τότε  $\alpha x^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 = -\gamma \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$ .
- Αν  $-\frac{\gamma}{\alpha}$  αρνητικό τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν  $-\frac{\gamma}{\alpha}$  θετικό τότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες(λύσεις)

$$x = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Π.χ

$$3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$2x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$3x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -6 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{6}{3} \Leftrightarrow x^2 = -2 \quad \text{Αδύνατη}$$

- Αν  $\gamma=0$  τότε  $\alpha x^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x + \beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $\alpha x + \beta = 0$

Π.χ

$$3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{3} \Leftrightarrow x = 0) \quad \text{ή} \quad (x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3)$$

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

---

$$6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow 6x(x+2) = 0 \Leftrightarrow (6x=0 \Leftrightarrow x=0) \quad \text{ή} \quad (x+2=0 \Leftrightarrow x=-2)$$

### Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) (x-1) \cdot (x-4) = 0 \quad \beta) x^2(x-1) = 0 \quad \gamma) (2-x)x = 0$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - 5x = 0 \quad \beta) 6x^2 = 12x \quad \gamma) 4x^2 + 8x = 0$$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - 16 = 0 \quad \beta) 4x^2 - 16 = 0 \quad \gamma) x^2 = 9$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) (x^3 - x) \cdot (x^2 - 9) = 0 \quad \beta) (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 4) = 0 \quad \gamma) x^4 - x^2 = 0$$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$a) 3x^2 + x = 0 \quad \beta) 3x^2 - 6 = 0 \quad \gamma) 3x(x-2) = x^2$$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$a) (2x-1)^2 - 1 = 0 \quad \beta) 3(x+2)^2 = 12$$

$$\gamma) \frac{(x-3)^2}{3} = 27 \quad \delta) (3x-1)^2 - 4x^2 = 0 \quad \varepsilon) (x+\sqrt{3})^2 - 3 = 0$$

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

- Αν

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$  δηλαδή είναι της μορφής  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$   
τότε πρώτα υπολογίζουμε την **Διακρίνουσα**

$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma$  και ανάλογα με το πρόσημο της  
βρίσκουμε, αν υπάρχουν, τις ρίζες(λύσεις) της  
εξίσωσης:

|  |  |
|--|--|
| $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma$ | Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \alpha \neq 0$                |
| $\Delta > 0$                                     | Έχει δύο ρίζες άνισες $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ |
| $\Delta = 0$                                     | Έχει μία διπλή ρίζα την $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$                       |
| $\Delta < 0$                                     | Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$   |

### Παράδειγμα 1

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$a = 1 \quad \beta = -5 \quad \gamma = 6$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες (λύσεις) άνισες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Δηλαδή υπάρχουν 2 διαφορετικοί αριθμοί, το  $x=2$  και το  $x=3$  που αν το αντικαταστήσουμε στη θέση του  $x$  στην εξίσωση, τότε το αποτέλεσμα είναι 0.

### Παράδειγμα 2

$$12x^2 - 7x + 1 = 0$$

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

$$a=12 \quad \beta=-7 \quad \gamma=1$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-7)^2-4\cdot 12\cdot 1=49-48=1>0$$

Άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες(λύσεις) άνισες:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 12}=\frac{7\pm 1}{24}=\begin{cases} \frac{7+1}{24}=\frac{8}{24}=\frac{8:8}{24:8}=\frac{1}{3} \\ \frac{7-1}{24}=\frac{6}{24}=\frac{6:6}{24:6}=\frac{1}{4} \end{cases}$$

### Παράδειγμα 3

$$x^2+(\sqrt{3}-1)\cdot x-\sqrt{3}=0$$

$$a=1 \quad \beta=\sqrt{3}-1 \quad \gamma=-\sqrt{3}$$

$$\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(\sqrt{3}-1)^2-4\cdot 1\cdot(-\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1^2+4\sqrt{3} =$$

$$(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}+1)^2$$

[**Προσέχω** ότι δεν κάνω χρήση της ιδιότητας  $\sqrt{3}^2=3$  για να μπορεί η  $\Delta$  να γραφτεί σαν τέλειο τετράγωνο]

Άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες(λύσεις) άνισες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{-(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2\cdot 1}=\frac{-\sqrt{3}+1\pm(\sqrt{3}+1)}{2} =$$
$$=\begin{cases} \frac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{2}=\frac{2}{2}=1 \\ \frac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{2}=\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3} \end{cases}$$

### Παράδειγμα 4

$$2x^2-8x+8=0$$

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

---

$$a=2 \quad \beta=-8 \quad \gamma=8$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4\cdot 2\cdot 8=64-64=0$$

Άρα η εξίσωση έχει 1 ρίζα (διπλή) την

$$x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-(-8)}{2\cdot 2}=\frac{8}{4}=2$$

### Ασκήσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$i)x^2-6x+8=0 \quad ii)3x^2-5x+2=0 \quad iii)5\phi^2+3\phi+9=0$$

$$iv)2s^2+4s+1=0 \quad v)9x^2+12x+4=0$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$i)9y^2-3y+64=10y^2+9y \quad ii)9(\omega^2-2)-8\omega=4\omega(2\omega-1)+14$$

$$iii)(2\kappa-3)^2=(\kappa-1)(\kappa-4)+9\kappa \quad iv)(x+4)^2=(x+2)^2+(x+3)^2$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$i)-\omega^2+\omega+90=0 \quad ii)x^2=\frac{1}{3}-\frac{x}{6} \quad iii)\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{12}=0$$

$$iv)25-6x+x^2=0$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$i)(x+1)(x^2-5x+6)=0 \quad ii)(x^2-7x+12)(2x^2+7x-4)=0$$

### Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Τριώνυμο ονομάζεται η παράσταση  $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

- Αν  $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma$  θετική τότε η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει 2 ρίζες άνισες  $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha}$  και τότε η  $f(x)=0$  γράφεται:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

[**προσέξτε** μην ξεχνάτε το **a** μπροστά από τις παρενθέσεις]

- Αν  $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = 0$  τότε η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει 1 ρίζα (διπλή) και η  $f(x)$  γράφεται

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$$

[**προσέξτε** μην ξεχνάτε το **a** μπροστά από τις παρενθέσεις]

- Αν  $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma$  αρνητική τότε η εξίσωση  $f(x)=0$  δεν έχει πραγματικές ρίζες και δεν παραγοντοποιείται.

### Παράδειγμα 1

Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο  $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$

$$a = 6 \quad \beta = -5 \quad \gamma = 1$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Άρα το τριώνυμο έχει 2 ρίζες άνισες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{6:6}{12:6} = \frac{1}{2} \\ \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } f(x) = 6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

### Παράδειγμα 2

Να γίνει γινόμενο παραγόντων το παρακάτω τριώνυμο

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$$

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Θα λύσω την αντίστοιχη εξίσωση  $2x^2 - 3x + 7 = 0$

$$a = \frac{1}{2} \quad \beta = -4 \quad \gamma = 8$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 16 - 16 = 0$$

Άρα η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα την

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-4)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{1} = 4$$

Άρα το τριώνυμο γράφεται :  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = \frac{1}{2}(x-4)^2$

### Ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$$f(y) = 3y^2 - 8y + 5$$

$$g(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$h(x) = -2x^2 + 5x - 3$$

$$k(y) = -y^2 + 10y - 25$$

2. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 3$$

$$g(x) = 9x^2 + 12x + 4$$

$$h(y) = 4x^2 - 17x + 15$$

$$k(y) = 3y^2 - 4y + 1$$

3. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$$f(x) = 3x^2 - (\sqrt{2} - 3)x - \sqrt{2}$$

$$g(x) = 4x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$a) \sqrt{3} \cdot x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot x + \sqrt{5} = 0$$

$$\beta) x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$$

$$\gamma) 2 \cdot x^2 - 3\sqrt{2}x + \sqrt{3} = 0$$

$$\delta) \sqrt{3} \cdot x^2 - 6 \cdot x + 3\sqrt{3} = 0$$

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$α) \frac{1}{6} - \frac{x(1-x)}{2} = \frac{x^2}{3}$$

$$β) 7x - \frac{3x(x+1)}{2} = 3$$

$$γ) \frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)(x+1)}{4} = -3$$

$$δ) \frac{5}{6} - \frac{x^2-1}{2} = \frac{2-x}{3} - \frac{(x-4)^2}{6}$$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$α) x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$β) 2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$$

$$γ) (x^2 - 2x)^2 + 5(x^2 - 2x) + 4 = 0$$

$$δ) x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$$

$$ε) 6x - 13\sqrt{x} = 5$$

$$στ) 4(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 10 = 0$$

4. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο άνισες λύσεις:

$$α) x^2 + ax - 1 = 0$$

$$β) ax^2 + 3x - a = 0, \quad a \neq 0$$

$$γ) x^2 + (a+2)x + a = 0$$

$$δ) ax^2 + (2a-1)x + a - 1 = 0$$

5. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση:

$$α) 4x^2 - 2(a-\beta)x - a\beta = 0$$

$$β) ax^2 + \beta x - a = 0, \quad a \neq 0$$

$$γ) x^2 - 2ax + a^2 - \beta^2 = 0$$

$$δ) x^2 - 3(a+\beta)x + 5a\beta = 0$$

6. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + 3x + 4 = \lambda$

α) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  η εξίσωση έχει μία διπλή λύση

β) Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση.

7. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda x^2 - (\lambda - 3)x + \lambda + 5 = 0, \quad \lambda \neq 0$$

α) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες η εξίσωση έχει μία διπλή λύση

β) Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε να λύσετε την εξίσωση

8. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  ο αριθμός 1 είναι λύση της

$$\text{εξίσωσης } (2\lambda^2 + 1)x^2 + 4\lambda x + \lambda + 1 = 0$$



## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

---

9. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda x^2 + (\lambda^2 + 5)x + 8(\lambda + 1) = 0$$

α) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης

β) Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση

10. Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda^2 + 1)x^2 - 2(\lambda + \mu)x + \mu^2 + 1 = 0$$

Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, τότε να αποδείξετε ότι:

α) οι αριθμοί  $\lambda$  και  $\mu$  είναι αντίστροφοι

β) η διπλή λύση της εξίσωσης είναι  $x = \mu$ .

11. Αν μία ρίζα της εξίσωσης  $x^2 + ax - 4 = 0$  είναι ο αριθμός 2, να βρεθεί η άλλη ρίζα της.

12. Να λύσετε την εξίσωση  $4x^2 + ax + 9 = 0$  αν η εξίσωση αυτή έχει κοινή λύση με τη εξίσωση  $2x + 1 = 0$ .