

**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x^2}{x^4 + 1}$

α) Το σημείο  $(-1, 1)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ ;

β) Αν  $x=2$ , ποια είναι η τιμή της  $f$ ;

γ) Αν  $f(x)=1$ , ποια είναι η τιμή του  $x$ ;

δ) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της  $f$ ;

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - (\alpha + 3)x + 3$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρεθεί η τιμή του  $\alpha$ , ώστε η τιμή της  $f$  στο  $x_0=2$  να είναι  $-1$ .

β) Αν  $f(2) = -1$ , να βρεθούν οι τιμές του  $x$  για τις οποίες η τιμή της  $f$  είναι  $0$ .

3. Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = \frac{1}{x-5} + \sqrt{x-2}$

β)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x-4}$

γ)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$

δ)  $f(x) = \sqrt{x-1} \sqrt{2-x}$

4. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$\alpha) f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2 - 1} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{9 + x^2}$$

$$\epsilon) f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$

$$\beta) f(x) = \frac{e^x}{x-1} + \frac{x^2+3}{x^2-x-12}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \frac{x\eta\mu\sqrt{x}}{\ln x - 1}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{\ln x}{x-2} + \frac{e^x}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\delta) f(x) = \sqrt{x-5} + \frac{x}{x-7}$$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln(x-2) - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = e^{x-3} - 1$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού της f και g .

β) Να λύσετε τις εξισώσεις  $f(x)=0$  και  $g(x)=0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x)<0$ .

6. Αν  $f(x) = \frac{1}{x}$  να αποδείξετε ότι  $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2f(\alpha+\beta)$

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4\alpha x}{\alpha^2 x^2 + 1}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τις τιμές του α έτσι, ώστε η τιμή της f στο 1 να είναι ίση με 2.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις :  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x}$  και  $g(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των  $f$  και  $g$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$  και την εξίσωση  $g(x) = 0$ .

9. Δίνονται οι  $f(x) = x + 1$  και  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της  $g$ .

γ) Εξετάστε αν οι  $f, g$  είναι ίσες.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  και  $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Να υπολογίσετε τις τιμές: α)  $(f(x))^2 - (g(x))^2$

β)  $(f(x))^2 + (g(x))^2$

11. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$  και  $g(x) =$

$\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x - 3}$  Να οριστούν οι συναρτήσεις  $f \cdot g$  και  $\frac{f}{g}$

12. Αν  $f(x) = x^2 + 6x + 8$  και  $g(x) = \sqrt{x - 2}$  να υπολογίσετε τα  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $fg$ ,  $\frac{f}{g}$

13. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x}$  και  $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ .

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των  $f$  και  $g$ .

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x)=x-2$  και  $g(x)=e^x-1$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των  $f$  και  $g$ .

β) Να λύσετε τις εξισώσεις  $f(x)=0$  και  $g(x)=0$

γ) Να ορίσετε τις συναρτήσεις  $\frac{f}{g}$  και  $\frac{g}{f}$

δ) Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ .

15. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x)=\frac{2}{x}$  και  $g(x)=x+1$ .

Βρείτε α) Τα πεδία ορισμού τους

β) Τα σημεία τομής των καμπυλών τους.

16. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^3+x^2-4x-4$ .

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β) Να βρεθούν οι τιμές  $f(1)$  και  $f(0)$

γ) Σε ποια σημεία τέμνει η γραφική παράσταση της  $f$  τους άξονες;

δ) Σε ποια διαστήματα η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ ;

ε) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $g(x)=\sqrt{f(x)}$

στ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  και της ευθείας  $y=-10$ .

17. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^3+x^2-4x-4$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- β) Να βρεθούν τα  $f(1)$  και  $f(0)$
- γ) Σε ποια σημεία η  $C_f$  τέμνει τους άξονες;
- δ) Σε ποια διαστήματα η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ ;
- ε) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x)=\sqrt{f(x)}$
- στ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  και της ευθείας  $\epsilon:y=-6$ .

18. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2+ax+\beta}{x-1}$$

Η  $C_f$  τέμνει τον  $y'y$  στο σημείο  $A(0,3)$  και διέρχεται από το σημείο  $B(-1,2)$

- α) Να βρείτε τις τιμές των  $a$  και  $\beta$
- β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της  $f$ .

19. Να υπολογίσετε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 3)$                       β)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 3)(x - 5)$

γ)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$                       δ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 3}{x + 1}$

20. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 7x + 10}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x^2 - x}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$$

21. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^2 - 5x - 10}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x^2 + x}$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6}$$

22. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x^2}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$$

23. Να υπολογιστούν τα όρια

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{20}}{x - 5}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-5}}{x-3}$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

$$\text{vi) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - 1}{\sqrt{x+5} - 2}$$

24. Αν  $f(x) = \begin{cases} ax + 10 & x > 2 \\ x + 3a & x < 2 \end{cases}$  να υπολογίσετε το  $a \in \mathbb{R}$

ώστε να υπάρχει το όριο της  $f$  στο  $x_0 = 2$ . Ποιο είναι το όριο αυτό;

25. Αν  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2\beta + 4 & x > -1 \\ 3\alpha - 4\beta x - 2 & x \leq -1 \end{cases}$  βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 10.$$

26. Αν  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 6}{x - 3} & x \neq 3 \\ a & x = 3 \end{cases}$  βρείτε το  $a \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f$

να είναι συνεχής.

27. Αν  $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & x \leq 1 \\ 2ax^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$  να βρείτε το  $a \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f$  να

είναι συνεχής.

28. Όμοια για την  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 8 & x \neq 2 \\ x - 2 & \\ a & x = 2 \end{cases}$

29. Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής. Αν  $(x-1)f(x) = x^2 - 3x + 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να υπολογιστεί η τιμή  $f(1)$ .

30. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + 3}{x^2 - 1}$$

Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της  $f$

β) τις τιμές του  $\alpha$ , ώστε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \in \mathbb{R}$

γ) το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  αν γνωρίζουμε ότι το όριο είναι πραγματικός αριθμός.

31. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i)  $f(x) = x^2 + x + 2$

vi)  $f(x) = \frac{\eta \mu x}{e^x}$

ii)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

vii)  $f(x) = x \operatorname{erf} x - \operatorname{erf} x + 2$

iii)  $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$

viii)  $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$

iv)  $f(x) = x^2 - e^x$

v)  $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x} + 2$



32. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i)  $f(x) = (x^2 + 5x - 3)^{10}$

vi)  $f(x) = \varepsilon\phi(\sigma\upsilon\nu x)$

ii)  $f(x) = \sqrt{x^2 + e^x}$

vii)  $f(x) = e^{\eta\mu x}$

iii)  $f(x) = \sqrt[3]{1+x+x^2}$

viii)  $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2 - \sqrt{x})$

iv)  $f(x) = \eta\mu^3 x$

ix)  $f(x) = \ln(x^4 + x^2 + 1)$

v)  $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2 + 1)$

33. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i)  $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$

v)  $f(x) = \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$

ii)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

vi)  $f(x) = \varepsilon\phi x^2$

iii)  $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

vii)  $f(x) = \sqrt{1 - \eta\mu 2x}$

iv)  $f(x) = \ln \sqrt{x}$

viii)  $f(x) = \ln^2(\eta\mu x)$

34. Αν  $f(x) = \alpha e^{vx} + \beta e^{-vx}$ , να δείξετε ότι  $f''(x) = v^2 f(x)$

35. Δίνεται η συνάρτηση  $f(t) = e^{-at}$ . Να βρείτε τις τιμές του  $a$  ώστε  $f''(t) + 3f'(t) = 4f(t)$

36. Αν  $f(x) = e^x \eta\mu 3x$ , να αποδείξετε ότι:  
 $f''(x) - 2f'(x) + 10f(x) = 0$

37. Αν  $f(x) = \eta\mu(\ln x)$  δείξτε ότι:  
 $x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x) = 0$ .

38. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f(x) = x^2 - 5x + 4$  στο σημείο  $A(2, f(2))$

39. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης  $f(x) = x^2 - x - 6$  στα σημεία όπου αυτή τέμνει τους άξονες.

40. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ .

Να βρείτε:

α) την παράγωγο της  $f$  στο  $x_0 = 1$

β) την παράγωγο της  $f$  στο  $x_0 = 2$

γ) τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(-1, f(-1))$

δ) τα σημεία της  $C_f$  στα οποία η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης 4.

ε) την εξίσωση της εφαπτομένης  $\epsilon$  της  $C_f$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $h: y = 6x - 3$ .

41. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$ . Να βρείτε :

α) την παράγωγο της  $f$  στο σημείο  $x_0 = -2$

β) τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης  $\epsilon$  της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $x_0 = -2$

42. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2$ . Να βρείτε την

εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της  $f$  που

- i) έχει συντελεστή διεύθυνσης 2
- ii) σχηματίζει με τον  $\chi\chi$  γωνία  $45^\circ$ .
- iii) είναι παράλληλη στην ευθεία  $3\chi + y - 1 = 0$ .
- iv) είναι παράλληλη στον άξονα  $\chi\chi$ .

43. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$ .

44. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης  $f(x) = x \sin x$  στο σημείο της  $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

45. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης:

i)  $f(x) = 1 + x\sqrt{x}$  στο σημείο  $A(4, f(4))$

ii)  $f(x) = x \ln x$  στο σημείο  $B(1, f(1))$

iii)  $f(x) = x + \eta\mu\chi$  στο σημείο  $\Gamma(\pi, f(\pi))$

iv)  $f(x) = x e^x$  στο σημείο  $\Delta(0, f(0))$

46. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ . Να βρείτε τις

τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(1, 5)$  και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της  $f$  στο  $A$  είναι 4.

47. Σε ποίο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=x^2-6x+1$  η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα  $\chi\chi$ .

48. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=x^2-4x+3$  στα οποία η εφαπτομένη είναι :

α) παράλληλη στην ευθεία  $y=6x+5$

β) κάθετη στην ευθεία  $y=\frac{1}{2}x-3$

49. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης  $f(x)=g(x+1)+x+1$  όπου  $g(x)=x^2+x$  στο  $A(1,f(1))$ .

50. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x)=e^x$  και  $g(x)=e^{-x}$ .

α) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων στα σημεία τους  $A(1,f(1))$  και  $B(1,g(1))$ .

β) Δείξτε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες είναι κάθετες.

51. Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της  $f(x)=-2\ln\frac{x+1}{x}$  που είναι παράλληλες στην διχοτόμο της γωνίας  $\chi\omega\chi$ .

52. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^3+ax^2+bx+\gamma$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma$  για τις οποίες η ευθεία  $y=2x+\beta$  είναι εφαπτομένη της καμπύλης της  $f$  στο σημείο  $A(1,3)$ .

53. Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma$  για τις οποίες η εφαπτομένη της καμπύλης  $f$  στο σημείο της  $A(-1, 1)$  έχει κλίση ίση με 8.

54. Αποδείξτε ότι οι εφαπτόμενες στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - 9x + 20$  στα σημεία που τέμνει τον άξονα  $x'x$  τέμνονται κάθετα.

55. Έστω  $f(x) = x^3 + x^2 + 1$  και τα σημεία  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$  της γραφικής παράστασης της  $f$  με  $\alpha \neq \beta$  στα οποία οι εφαπτόμενες της  $C_f$  είναι παράλληλες. Να αποδειχτεί ότι ισχύει  $\alpha + \beta = -\frac{2}{3}$ .

56. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f(x) = 3x^2$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(-\sqrt{3}, 0)$

57. Σε ένα σύστημα αξόνων  $Ox\psi$  δίνονται τα σημεία  $A(0, \chi + 1)$  και  $B(\chi^2 + 2\chi, 0)$  με  $\chi > 0$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $OAB$  ως προς  $\chi$  όταν  $\chi = 2$ .

58. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  η οποία σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία ίση με  $\frac{\pi}{4}$  αν  $f(x) = 2x + x^2$ .

59. Αν  $f(x) = x^2 - 2$  και  $g(x) = -\sqrt{x}$  να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των  $C_f$ ,  $C_g$  στο κοινό τους σημείο είναι κάθετες.

60. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=\sin x$ . Να βρείτε:

α) την  $f'$

β) την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

γ) τα σημεία στα οποία η παραπάνω εφαπτομένη τέμνει τους άξονες καθώς και το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και τους άξονες.

61. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=ax^2+bx+c$  με  $a \neq 0$ . Να προσδιοριστούν οι  $a, b$  και  $c$  έτσι ώστε η  $C_f$  να περνά από το σημείο  $A(1,3)$  και η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $B(2,0)$  να είναι παράλληλη με την ευθεία  $\varepsilon:4x+y=8$ .

62. Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση πάνω σε έναν άξονα  $x'x$ . Η θέση του κινητού  $x(t)$  δίνεται από τον τύπο  $x(t)=t^2-6t+5$ , όπου  $t$  είναι ο χρόνος σε sec με  $t \in [0,10]$ .

α) Σε ποια θέση του άξονα βρίσκεται το κινητό στην αρχή της κίνησης του;

β) Πόση είναι η ταχύτητα του κινητού μετά από 4 sec;

γ) Πόση είναι η επιτάχυνση του κινητού;

δ) Ποια χρονικά διαστήματα το κινητό κινείται προς τα δεξιά και ποια προς τα αριστερά ;

ε) Πόσο είναι το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το κινητό στα πρώτα 10 δευτερόλεπτα;

63. Το κόστος παραγωγής  $\kappa(\chi)$  και η τιμή πώλησης  $\Pi(\chi)$   $\chi$  μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνονται από τις συναρτήσεις  $\kappa(\chi)=\frac{1}{3}\chi^3-20\chi^2+600\chi+500$  και  $\pi(\chi)=425\chi$  αντίστοιχα . Να βρεθεί:

α) η συνάρτηση  $\varepsilon(\chi)$  που δίνει το κέρδος από την πώληση  $\chi$  μονάδων του συγκεκριμένου προϊόντος .

β) τότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός.

64. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i)  $f(x)=4x^2-16x+3$

iv)  $f(x)=x^2 e^x$

ii)  $f(x)=\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{1}{4}$

v)  $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

iii)  $f(x)=-x^2+4x+3$

vi)  $f(x)=(\sin x - \eta \mu x)e^x$

65. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

i)  $f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$

ii)  $f(x)=3x^5-5x^3+8$

iii)  $f(x)=\frac{x^4}{4}-8x+10$

iv)  $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$

66. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

i)  $f(x)=(x-1)(x+2)^2$

iv)  $f(x)=x e^x$

ii)  $f(x)=4\sqrt{x}(x-2)$

v)  $f(x)=x \ln x$

iii)  $f(x)=x+\frac{4}{x}$

67. Βρείτε τη σχέση μεταξύ των  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε η συνάρτηση  $f(x) = -x^3 + 2\alpha x^2 + \beta x + 4$  να είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

68. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$ . Αν στο  $x=2$  η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο το 1 να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$ . Στη συνέχεια να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .

69. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ . Να βρεθούν:

α) το πεδίο ορισμού της  $f$

δ) τα τοπικά ακρότατα της  $f$

β) η  $f'$

ε) η  $f''$

γ) η μονοτονία της  $f$

70. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x + 10$

α) Να βρεθεί η  $f'$  και η  $f''$

β) Να λυθεί η εξίσωση  $f'(x) = 0$

γ) Να βρεθεί το πρόσημο της  $f'$

δ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

71. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + (\alpha - 1)x^2 + 3x + \alpha^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η  $f$  δεν έχει ακρότατο.

72. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\alpha x^2}{2} + 4x + 2$

α) Να βρεθεί η παράγωγος της  $f$ .

β) Να προσδιοριστούν οι τιμές του  $\alpha$  για τις οποίες η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .



73. i) Να βρείτε τη σταθερή  $a \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$  να παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x=2$ .

ii) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  αν  $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + x$  έχει ακρότατες τιμές στο  $x=-1$  και  $x=2$ .

74. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^4 + 4\alpha^3 x + \beta$  με  $\alpha > 0$ . Αν η συνάρτηση παρουσιάζει για  $x=1$  μέγιστο το 8, να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

75. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 20. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενο τους.

76. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν  $64 \text{ cm}^2$ , να βρείτε εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο.

77. Από όλα τα ορθογώνια με διαγώνιο ίση με 9cm, ποιο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

78. Από όλα τα ορθογώνια που έχουν περίμετρο 16cm, ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη διαγώνιο;

79. Μια εταιρεία κατασκευάζει κυλινδρικά μεταλλικά δοχεία με όγκο  $1000\pi \text{ cm}^3$ . Να βρείτε το ύψος  $h$  και την ακτίνα  $R$  του δοχείου έτσι ώστε το κόστος κατασκευής τους να είναι το μικρότερο δυνατό.

80. Να βρείτε το σημείο της ευθείας με εξίσωση  $y=3x+4$  που είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

81. Ένα σώμα κινείται στον άξονα  $x'x$  ώστε την τυχαία χρονική στιγμή  $t \geq 0$  η θέση του να δίνεται από τον τύπο  $s(t) = 2t - 15 \ln(2t+6)$ . Να βρεθεί η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή  $t_0$  που είναι ακίνητο.

82. Το κόστος παραγωγής ενός αυτοκινήτου και η τιμή πώλησης του, συναρτήσει του χρόνου  $t$  σε ώρες, δίνονται από τις σχέσεις:  $k(t)=30t^2$  και  $E(t)=30(100-\frac{250}{t})$  σε χιλιάδες δραχμές.

α) Να βρεθεί το κέρδος από την πώληση ενός αυτοκινήτου ως συνάρτηση του χρόνου που απαιτείται για την παραγωγή του

β) Πόσες ώρες απαιτούνται για την κατασκευή του έτσι ώστε το κέρδος να είναι μέγιστο;

γ) Να υπολογιστεί το μέγιστο κέρδος.

83. Ένας αγρότης έχει συρματοπλέγμα 200m για να περιφράξει από τις τρεις πλευρές ένα χώρο σχήματος ορθογωνίου. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το ορθογώνιο να έχει μέγιστο εμβαδόν;

84. Ένα σύρμα έχει μήκος 1m και κόβεται σε δυο μέρη για να κατασκευαστούν με αυτά ένας κύκλος και ένα τετράγωνο αντίστοιχα. Πως πρέπει να κοπεί το σύρμα για να είναι ελάχιστο το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων;

85. Όταν τυπώνεται ένα βιβλίο, οι τυπογράφοι αφήνουν σε κάθε σελίδα επάνω και κάτω περιθώριο 3cm και στα δύο πλάγια (αριστερά και δεξιά) αφήνουν περιθώριο 1cm. Έστω  $x$  το πλάτος και  $y$  το μήκος του τυπωμένου μέρους της σελίδας

α) Να εκφραστεί το εμβαδό  $E$  της σελίδας ως συνάρτηση του  $x$  αν το τυπωμένο μέρος έχει εμβαδό  $250 \text{ cm}^2$ .

β) Να βρεθούν οι διαστάσεις  $x$  και  $y$  του τυπωμένου μέρους ώστε να έχουμε την ελάχιστη κατανάλωση χαρτιού.

86. Δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ανοικτό από πάνω. Ο όγκος του δοχείου είναι  $0,5 \text{ cm}^3$ .

α) Αποδείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας του δοχείου είναι  $E(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ .

β) Υπολογίστε την πλευρά  $x$  ώστε το εμβαδό  $E(x)$  να είναι ελάχιστο.

87. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής  $x$  μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι  $K(x) = \frac{x^3}{3} - 20x^2 + 600x + 1000$ , χιλιάδες δραχμές με  $0 < x < 105$ . Η είσπραξη από την πώληση των  $x$  μονάδων είναι  $E(x) = 420x - 2x^2$  χιλιάδες δραχμές. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

88. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τις τιμές των  $a, b, c \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η  $f$  παρουσιάζει στο  $x=1$  τοπικό ακρότατο το 2 και η ευθεία  $y=x$  είναι εφαπτομένη της καμπύλης της  $f$  στο σημείο της  $O(0,0)$ .

89. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό  $200 \text{ m}^2$  ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο;

90. Η θετική αντίδραση ενός οργανισμού από τη χορήγηση ενός φαρμάκου δίνεται από τη συνάρτηση  $f(x) = x^2(a-x)$ , όπου  $a > 0$  και  $x$  η ημερήσια δόση σε  $\text{mg}$ . Ποια είναι η ενδεδειγμένη δόση του φαρμάκου, ώστε να έχουμε τη μέγιστη θετική αντίδραση του οργανισμού;

91. Μια ώρα μετά τη λήψη  $\chi$  mgr ενός αντιπυρετικού η μείωση της θερμοκρασίας του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση  $T(\chi) = \chi^2 - \frac{\chi^3}{4}$ ,  $0 < \chi < 3$ . Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση  $\chi$ , ώστε ο ρυθμός μείωσης της θερμοκρασίας ως προς  $\chi$ , να είναι μέγιστος.

92. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = e^{3x-2} - 9e^{x+8}$  η εφαπτόμενη έχει τον μικρότερο συντελεστή διεύθυνσης.

93. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x \ln^2 x$  η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

94. Όταν ένας μικροοργανισμός κινείται μέσα στο αίμα ενός ασθενή, καταναλώνει ενέργεια  $E = \frac{1}{v} [2(v-35)^2 + 750]$ , όπου  $v$  είναι η ταχύτητα του.

α) Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθεί, ώστε να καταναλώσει την ελάχιστη ενέργεια;

β) Ποια είναι η ελάχιστη αυτή ενέργεια;

95. Το κέρδος  $P$  σε ευρώ από την πώληση ενός αυτοκινήτου δίνεται από τον τύπο  $P(t) = 20(200 - \frac{250}{t} - t^2)$  όπου  $t$  είναι ο χρόνος σε ώρες που χρειάζεται για την παραγωγή του.

α) Πόσος χρόνος απαιτείται για την κατασκευή ενός αυτοκινήτου, όταν το κέρδος είναι μέγιστο;

β) Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος από την πώληση του αυτοκινήτου;

96. Ένα σώμα κινείται στον άξονα  $x'x$  και η θέση του δίνεται από την συνάρτηση  $x(t)=t^3-6t^2+9t-4$  όπου  $t$  είναι ο χρόνος σε sec. Να βρείτε:

- α) Σε ποια θέση βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή  $t=0$ ;
- β) Προς ποια κατεύθυνση κινείται το σώμα τη χρονική στιγμή  $t=0$ ;
- γ) Ποιες χρονικές στιγμές το σώμα αλλάζει κατεύθυνση;
- δ) Πόσες φορές αλλάζει η κατεύθυνση της κίνησης του;
- ε) Ποια χρονική στιγμή δεν επιταχύνεται το σώμα;