1.Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$i)\ f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-2)(x-1)}$ ii)f(x)= $\dfrac{\text{x-3}}{\text{x}^2-9}$ iii)f(x)= $\dfrac{\sqrt{\text{3-x}}}{\text{x-1}}$

ΛΥΣΗ

i)Αρκεί $(x-2)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ και $\text{x}\neq$ -1.

Έτσι $A=\mathbb{R}-\{-1,2\}$.

ii)Αρκεί $x^2-9\neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$ και $\text{x}\neq$ -3.

Έτσι $A=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

iii)Αρκεί

$$\begin{array}{ccc} 3-x\geq 0 & & \text{x}\leq 3 \\ \text{και} & \Leftrightarrow & \text{και} \\ \chi\text{-}1\neq 0 & & \chi\neq 1 \end{array}$$

έτσι A= $(-\infty,1)\cup(1,3]$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$i)\ f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}$ $\quad ii)\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}$

$iii)\ f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$

ΛΥΣΗ

i)Αρκεί

$$\begin{array}{ccc} x-2\geq 0 & & \text{x}\geq 2 \\ \text{και} & \Leftrightarrow & \text{και} \\ 5\text{-}\chi\geq 0 & & \chi\leq 5 \end{array}$$

Έτσι $\text{A}=[2,5]$

Αρκεί

ii) $\frac{x-1}{3-x} \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(3-x) \geq 0$ και $x \neq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \prec 3$

Έτσι Α=$[1,3)$

iii)Αρκεί $x^2-5x+4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ ή $x \geq 4$

Έτσι Α=$(-\infty,1] \cup [4,+\infty)$

3.Να υπολογίσετε τα όρια:

$i)\lim_{x\to 1}(3x^2+5x-2)$ ii)$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2-1}$

ΛΥΣΗ

$$i)\lim_{x\to 1}(3x^2+5x-2) = 3\cdot 1^2+5\cdot 1-2=6$$

$$ii)\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2-1} = \sqrt{2^2-1} = \sqrt{3}$$

4.Να υπολογίσετε τα όρια:

$i)\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-2x}{2x^2-5x+3}$ $ii)\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-7x+6}$

ΛΥΣΗ

i)Επειδή $\lim_{x\to 1}(2x^2-5x+3) = 2\cdot 1^2-5\cdot 1+3=0$ θα παραγοντοποιήσουμε, οπότε:

$$2x^3-2x = 2x(x^2-1) = 2x(x-1)(x+1)$$

$$2x^2-5x+3 = 2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) = (x-1)(2x-3)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3-2x}{2x^2-5x+3}=\lim_{x\to1}\frac{2x(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x(x+1)}{2x-3}=$$

$$\frac{2\cdot1\cdot(1+1)}{2\cdot1-3}=-4$$

ii)Επειδή $\lim\limits_{x\to2}\left(x^3-7x+6\right)=2^3-7\cdot2+6=0$ έχουμε:

$$x^3-8=x^3-2^3=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$$

Για το x^3-7x+6 από το σχήμα Horner έχουμε:

$$x^3-7x+6=(x-2)\left(x^2+2x-3\right)$$ Άρα:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^3-7x+6}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)\left(x^2+2x-3\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x-3}=$$

$$\frac{2^2+2\cdot2+4}{2^2+2\cdot2-3}=\frac{12}{5}$$

5.Να υπολογίσετε τα όρια:

$i)\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ $\qquad ii)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

ΛΥΣΗ

$$i)\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$ii)\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

6.Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{2x-4} & ,x\neq 2\\ \dfrac{\alpha^2}{2}+\alpha & ,x=2\end{cases}$$

i)Να βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$

ii)Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_o=2$.

ΛΥΣΗ

i)Είναι

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{2x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}{2(x-2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$$

ii)Πρέπει $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \frac{3}{2}=\frac{a^2}{2}+a\Leftrightarrow a^2+2a-3=0\Leftrightarrow$

$a=1$ ή $\alpha=-3$.

7.Να βρείτε τις παραγώγους

$i)\, f(x)=x^{-3}$ $\quad ii)\, f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ $\quad iii)\, f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

ΛΥΣΗ

$$i)\, f'(x)=\left(x^{-3}\right)'=-3x^{-3-1}=\frac{-3}{x^4}$$

$$ii)\, f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$iii)\, f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}=$$

$$-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

8.Να βρείτε τις παραγώγους

$$i)\, f(x)=x^3+\sigma\upsilon\nu\chi+\sqrt{\chi}+e^3$$

$$ii)\, f(x)=2x^4-\frac{\eta\mu\chi}{3}+\frac{\alpha e^x}{5}-\ln 2$$

ΛΥΣΗ

$$i)\, f'(x)=\left(x^3+\sigma\upsilon\nu\chi+\sqrt{x}+e^3\right)'=\left(x^3\right)'+\left(\sigma\upsilon\nu\chi\right)'+\left(\sqrt{\chi}\right)'+\left(e^3\right)'=$$

$$=3\mathrm{x}^2-\eta\mu\chi+\frac{1}{2\sqrt{\chi}}+0=3x^2-\eta\mu\chi+\frac{1}{2\sqrt{\chi}}$$

$$ii)\, f'(x)=\left(2x^4\right)'-\left(\frac{\eta\mu\chi}{3}\right)'+\left(\frac{\alpha e^x}{5}\right)'-\left(\ln 2\right)'=$$

$$8x^3-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu\chi+\frac{\alpha}{5}e^x-0.$$

9.Να υπολογίσετε τις παραγώγους

$$i)\, f(x)=\frac{\eta\mu\chi}{e^x} \qquad ii)\, f(x)=x\cdot\ln x$$

ΛΥΣΗ

$$i)\ f'(x)=\left(\frac{\eta\mu\chi}{e^x}\right)'=\frac{(\eta\mu\chi)'\cdot e^x-\left(e^x\right)'\cdot\eta\mu\chi}{\left(e^x\right)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu\chi\cdot e^x-e^x\cdot\eta\mu\chi}{\left(e^x\right)^2}=$$

$$\frac{\mathrm{e}^x\left(\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi\right)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi}{e^x}.$$

$$ii)\ f'(x)=(x\cdot\ln x)'=\left(x\right)'\cdot\ln x+x\cdot\left(\ln x\right)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

10.Να υπολογιστεί η παράγωγος

$i)\ f(x)=\left(x^2+5x-3\right)^{10}$ $\qquad ii)\ f(x)=\sqrt{x^2+e^x}$

$$i)\ f'(x)=\left[\left(x^2+5x-3\right)^{10}\right]'=10\left(x^2+5x-3\right)^9\cdot\left(x^2+5x-3\right)'=$$

$$10\left(x^2+5x-3\right)^9\left(2x+5\right)$$

$$ii)\ f'(x)=\left(\sqrt{x^2+e^x}\right)'=\frac{\left(x^2+e^x\right)'}{2\sqrt{x^2+e^x}}=\frac{2x+e^x}{2\sqrt{x^2+e^x}}$$

11.Να υπολογιστεί η παράγωγος

$i)\ f(x)=\eta\mu^3\chi$ $\qquad$ ii)f(x)=ημ3χ

ΛΥΣΗ

$$i)\ f'(x)=\left(\eta\mu^3\chi\right)'=3\eta\mu^2\chi\cdot\left(\eta\mu\chi\right)'=3\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$$

$$ii)\ f'(x)=\left(\eta\mu3\chi\right)'=\sigma\upsilon\nu3\chi\cdot\left(3\chi\right)'=3\sigma\upsilon\nu3\chi.$$

12.Αν $f(x)=\alpha e^{vx}+\beta e^{-vx}$ τότε να δείξετε ότι $f''(x)=v^2 f(x)$

ΛΥΣΗ

$f(x)=\alpha e^{vx}+\beta e^{-vx}$

$f'(x)=\left(\alpha e^{vx}+\beta e^{-vx}\right)'=\alpha e^{vx}\left(vx\right)'+\beta e^{-vx}\left(-vx\right)'=\alpha ve^{vx}-\beta ve^{-vx}$

$f''(x)=\left(\alpha ve^{vx}-\beta ve^{-vx}\right)'=\alpha ve^{vx}\left(vx\right)'-\beta ve^{-vx}\left(-vx\right)'=\alpha v^2e^{vx}+\beta v^2e^{-vx}$

Επομένως

$f''(x)=v^2\left(\alpha e^{vx}+\beta e^{-vx}\right)=v^2 f(x).$

13.Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=e^{-\alpha t}$.Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $f''(t)+3f'(t)=4f(t)$

ΛΥΣΗ

$f'(t)=\left(e^{-\alpha t}\right)'=e^{-\alpha t}\left(-at\right)'=-ae^{-at}$

$f''(t)=\left(-ae^{-at}\right)'=-a\left(e^{-at}\right)'=-a\left(-ae^{-at}\right)=a^2e^{-at}$

$f''(t)+3f'(t)=4f(t)\Leftrightarrow a^2e^{-at}-3ae^{-at}=4e^{-at}$

$\Leftrightarrow e^{-at}\left(a^2-3a\right)=4e^{-at}\Leftrightarrow a^2-3a=4$

$\Leftrightarrow a^2-3a-4=0\Leftrightarrow a=4$ ή $\alpha=-1.$

14.Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f(x)=x^2-5x+4 στο σημείο Α(2,f(2)).

ΛΥΣΗ

$f(2)=4-10+4=-2.$

$f'(x)=2x-5$

$f'(2)=4-5=-1$

Άρα η εφαπτομένη είναι:

$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-(-2)=(-1)(x-2)$

$\Leftrightarrow y+2=-x+2\Leftrightarrow y=-x$

15.Να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=x^2-3x+1$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+2$

ΛΥΣΗ

Είναι $f'(x)=2x-3$. Έστω $A(x_o,f(x_o))$ το σημείο επαφής .

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι ίσος με $f'(x_o)$.

Επειδή η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+2$ πρέπει $f'(x_0)=1 \Leftrightarrow 2x_0-3=1 \Leftrightarrow x_0=2$

Έχουμε $f(2)=4-6+1=-1$ και $f'(2)=1$ άρα η εφαπτομένη είναι

$$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-(-1)=1(x-2) \Leftrightarrow y=x-3$$

16.Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

Είναι $f'(x)=2x$. Έστω $M(x_o,f(x_o))$ ή $M(x_o,x_o^2+1)$ το σημείο επαφής.

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y=f'(x_o)x$ ή $y=2x_ox$.

Επειδή το Μ ανήκει στην εφαπτομένη έχουμε:

$$x_0^2+1=2x_0\cdot x_0 \Leftrightarrow x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1$$

Για $x_0=1$ και $x_0=-1$ οι εφαπτόμενες έχουν εξισώσεις αντίστοιχα

$$y = 2\cdot 1\cdot x \Leftrightarrow y = 2x \quad \text{και}$$
$$y = 2\cdot(-1)x \Leftrightarrow y = -x$$

17.Η θέση ενός υλικού σημείου , το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο

$x=x(t)=-t^3+12t^2-36t$ όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.

i)Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου για t=1 s.

ii)Πότε το σημειο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;

iii)Να βρείτε πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση.

iv)Να βρείτε το υλικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 7 s.

ΛΥΣΗ

i)Η ταχύτητα και η επιτάχυνση σε χρόνο t αντίστοιχα

$\upsilon(t)=x'(t)=-3t^2+24t-36$

$\alpha(t)=\upsilon'(t)=-6t+24$

Για t=1 έχουμε $\upsilon(1)=-3+24-36=-15$ m/sec

$\alpha(1)=-6+24=18$ m/sec^2

ii) Το σημειο είναι ακίνητο ,όταν:

$$\upsilon(t)=0 \Leftrightarrow -3t^2+24t-36=0 \Leftrightarrow -3\left(t^2-8t+12\right)=0$$
$$\Leftrightarrow t^2-8t+12=0 \Leftrightarrow t=2 \quad \text{ή} \quad t=6$$

Άρα το σημείο είναι ακίνητο ύστερα από 2 s και ύστερα από 6 s.

iii)Το σημείο κινείται στην θετική κατεύθυνση όταν $\upsilon(t) > 0 \Leftrightarrow 2 < t < 6$ και στην αρνητική κατεύθυνση όταν $\upsilon(t) < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 2$ ή $t>6$

iv)Η απόσταση που διανύθηκε είναι:

Στην διάρκεια των 2 πρώτων δευτερολέπτων

$$S_1 = \left|x(2) - x(0)\right| = \left|-32 - 0\right| = 32m$$

Από t=2 μέχρι t=6

$$S_2 = \left|x(6) - x(2)\right| = \left|0 + 32\right| = 32m$$

Από t=6 μέχρι t=7

$$S_3 = \left|x(7) - x(6)\right| = \left|-7 - 0\right| = 7m$$

Άρα το ολικό διάστημα είναι S=32+32+7=71m

18.Να εξετάσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$.

ΛΥΣΗ

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad \chi = 3.$$

		1		3	
f’	+		-		+
f	↗		↘		↗

Αρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[3,+\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,3]$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=1$,το f(1)=3 και τοπικό ελάχιστο στο $x_0=3$ το f(3)=-1.

19.Ένας αγρότης έχει συρματόπλεγμα μήκους 200m για να περιφράξει από τις τρείς πλευρές ένα χώρο σχήματος ορθογώνιου . Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το ορθογώνιο να έχει μέγιστο εμβαδό;

ΛΥΣΗ

Έστω x και y οι διαστάσεις του ορθογωνίου .

Τότε 2x+y=200 ή y=200-2x.

Το εμβαδό Ε του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο

$E(x)=xy=x(200-2x)=200x-2x^2$ με $\chi\in(0,100)$

Έχουμε $E'(x)=(200x-2x^2)'=200-4x$.

$$E'(\chi)=0 \Leftrightarrow 200-2\chi=0 \Leftrightarrow \chi=50$$

		50	
E’	+		-
E	↗		↘

Οπότε το εμβαδό γίνεται μέγιστο για x=50 και

y=200-2x=200-100=100.