9ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1.Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $Α=90^0$,ΑΔ ύψος και ΑΓ =20 ,ΒΓ = 25.Να υπολογίσετε τα τμήματα ΔΓ,ΔΒ,ΑΒ,ΑΔ.

2.Ενα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές με μήκος ΑΒ=3λ, ΑΓ=4λ, και ΒΓ=5λ ,λ>0

α)Να βρείτε το είδος του τριγώνου

β)Αν το ΑΔ είναι ύψος ,να αποδείξετε ότι ΔΓ = $\frac{16}{9}$ ΔΒ

3.Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ και ΒΓ τέμνονται κάθετα.Να αποδείξετε ότι

$ΑΓ^2+ΒΔ^2=ΑΒ^2+ΓΔ^2$

4.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο . Το αντιδιαμετρικό σημείο του Α είναι το Δ.Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Δ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα .Αν ΑΒ=4, ΒΕ= 8 και ΑΓ=6 να βρεθούν:

α)το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΖ

β)η γωνία ΔΑΖ

5. Σε ένα τετράγωνο πλευράς α παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα,έτσι ώστε ΒΕ=$\frac{1}{3}$α και ΓΖ=$\frac{2}{9}$α.Να αποδείξετε ότι $ΑΕ \perp ΕΖ$.

6.Έστω ΟΑ η ακτίνα ενός κύκλου (Ο,R) και ΒΓ μια χορδή του παράλληλη στην ΟΑ .Να αποδείξετε ότι

$ΑΒ^2+ΑΓ^2=4R^2$

επιμέλεια : ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

7. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο σημείο Α και το ύψος του ΑΔ.Αν ΒΔ=9 και ΔΓ=16 να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΓ,ΑΔ,ΑΓ,ΑΒ.

8.Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι β=20 ,γ=15.
Να υπολογίσετε :α)την υποτείνουσα του
β)το $υ_α$

9.Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι Α=Δ=90^0 ,ΑΒ=15 ΓΔ=10 και ΑΔ=12.Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ και την διάμεσο δ του τραπεζίου.

10.Δίνεται ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με Α=Δ=90^0 και τα μέσα Ε και Ζ των διαγωνίων του.Να αποδείξετε ότι
$ΒΓ^2 - ΑΔ^2 = 4\ ΕΖ^2$

11.Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και φέρνουμε χορδή ΕΖ // ΑΒ.Αν Ρ είναι τυχαίο σημείο της ΑΒ,να δειχτεί ότι $ΡΕ^2+ΡΖ^2=ΑΡ^2+ΒΡ^2$

12.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=12,ΑΓ=28 και ΒΓ=20.
α)Να δειχτεί ότι η γωνία Β είναι αμβλεία και να βρεθεί η προβολή της ΑΒ στην ΒΓ.
β)Να βρεθεί η γωνία Β.

13.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με α=18 ,β=12 και γ=9 και το σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε να είναι $\frac{ΒΡ}{ΡΓ}=\frac{4}{5}$.Να υπολογίσετε το μέτρο του τμήματος ΑΡ.

14.Αν ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) είναι ισοσκελές τραπέζιο ,να δειχτεί ότι $ΒΔ^2=ΑΒ^2+ΒΓ\cdot ΑΔ$

επιμέλεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

15.Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΑΚΒ και φέρνουμε τη διχοτόμοΚΘ της ΑΚΒ.Αν από τυχαίο σημείο Η του τόξου ΑΒ φέρουμε την $ΗΛ \perp ΚΑ$ που τέμνει την ΚΘ στο Μ,να δειχτεί ότι $ΚΑ^2= ΗΛ^2+ΜΛ^2$

16.Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και φέρουμε τις $ΑΚ \perp ΒΔ$, $ΓΛ \perp ΒΔ$.Να δειχτεί ότι $ΑΔ^2+ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΓΔ^2+2ΒΔ\ ΚΛ$

17.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΒΛ.Να δειχτεί ότι ισχύει $ΑΒ^2=ΑΓ\ ΑΛ+ΒΓ\ ΒΚ$

18.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ<ΑΓ.Αν Δ είναι η προβολή του Α πάνω στην πλευρά ΒΓ ,να αποδείξετε ότι $ΑΓ^2-ΑΒ^2=ΔΓ^2-ΔΒ^2$

19.Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $Α=90^0$,$Γ=30^0$ και ΑΓ=4.Αν ΑΔ το ύψος να υπολογιστούν τα μήκη ΑΔ,ΔΓ,ΒΓ,ΑΒ και ΒΔ

20.Δύο κύκλοι (Κ,8) και (Λ,2) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε.Αν ΑΒ είναι η κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων να αποδείξτε ότι ΑΒ=8.

21.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=14,β=15 και γ=13.Να βρεθούν α)το είδος του τριγώνου
β)η προβολή της ΑΒ πάνω στη ΒΓ
γ)το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ

22.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=7,β=5 ,$γ=4\sqrt{2}$.Να βρεθεί
α) το είδος του τριγώνου
β)η προβολή της ΑΒ πάνω στην ΒΓ
γ)το ύψος ΑΔ και η γωνία Β.

επιμέλεια : ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

23.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α,β,γ για τις οποίες ισχύει η σχέση $γ^2=α^2+β^2+αβ$
α)Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο
β)Να υπολογίσετε την γωνία Γ

24.Δίνεται ένα αμβλυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνοΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) Αν Δ είναι η προβολή του σημείου Β πάνω στην πλευρά ΑΓ να αποδείξετε ότι $α^2=2β$ ΓΔ

25.Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=9,ΒΓ=12,ΓΔ=13, ΔΑ =14 και ΑΓ=15 και ΒΕ$\perp$ΑΓ ,ΔΖ$\perp$ΑΓ και ΑΕ=χ, ΕΖ=ω και ΖΓ= y.Να υπολογίσετε τα χ,y,ω.

26.Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με α=5,β=7 και γ=3.
Να αποδείξετε ότι :Α)το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο
Β)αν ΓΔ$\perp$ΑΒ τότε ΒΔ=$\frac{5}{2}$
Γ)Β=120^0

27.Σε ένα οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) φέρνουμε το ύψος ΓΔ.Να αποδείξετε ότι $ΒΓ^2=2ΑΒ\ ΒΔ$

28.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α>90^0, α=20 ,γ=16 και η προβολή χ της πλευράς γ πάνω στην β είναι 5.Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΓ.

29.Δίνεται ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ .
Να αποδείξετε ότι $ΒΔ^2=ΒΓ^2+ΑΒ\ ΓΔ$

30.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι β=2α και γ=α$\sqrt{7}$
α)Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο
β)Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΒΓ πάνω στην πλευρά ΑΓ
γ)Να αποδείξετε ότι Γ=120^0.

Επιμέλεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

31.Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ.Στην προέκταση της ημιευθείας ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΔ=ΑΒ.Να αποδείξετε ότι $ΓΔ^2=2ΒΓ^2+ΑΒ^2$.

32.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι β=6 ,γ=8 και $μ_α$=5.
Να βρεθούν:
Α)το μήκος της πλευράς α,
Β)το είδος του τριγώνου
Γ) το μήκος του ύψους $υ_α$

33.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=3 ,β=5 και γ=7.Να βρεθούν
α)το είδος του τριγώνου
β)το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ πάνω στην πλευρά ΒΓ.

34.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=α ,ΒΓ=β ΓΔ=γ και ΔΑ=δ και α>γ.Αν Κ,Λ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΓΔ αντιστοίχως να υπολοστεί το ΚΛ.

35.Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και Μ τυχαίο σημείο της διαγωνίου του ΒΔ ,να δειχτεί ότι $ΒΓ^2=ΑΜ^{2}+ΒΜ\,ΔΜ$

36.Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^0$) να αποδειχτεί ότι ισχύουν
α) $α^2+β^2+γ^2=8μ_α^2$
β)$μ_β^2+μ_γ^2=5μ_α^2$

37.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις διαμέσους του ΑΜ, ΒΚ, ΓΛ. Αν είναι $ΒΚ\perp ΓΛ$ να αποδειχτεί ότι ισχύει $μ_β^2+μ_γ^2=μ_α^2$

38.Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $β^2+γ^2=2α^2$, να αποδειχτεί ότι ισχύει και η $μ_β^2+μ_γ^2=2μ_α^2$.

Επιμέλεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

39.Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς γ και Μ τυχαίο σημείο εκτός ρόμβου.Να δειχτεί ότι ισχύει $ΜΒ^2+ΜΔ^2= α^2+β^2+γ^2$,όπου α=ΜΓ ,β=ΜΑ , γ=ΑΓ=ΑΔ

40.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Μ τυχαίο σημείο της ΒΓ.Να δειχτεί ότι $ΑΒ^2=ΑΜ^2+ΜΒ\ ΜΓ$

41.Οι πλευρές α,β,γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ικανοποιούν τη σχέση $β^2+γ^2=5α^2$.Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει πλευρές τις διαμέσους του τριγώνου ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

42.Σε έναν κύκλο (Ο,R) παίρνουμε μια διάμετρο ΑΒ και δύο σημεία Γ και Δ αυτής έτσι ώστε ΑΓ=ΒΔ.Στο σημείο Δ φέρνουμε μια ημιευθεία κάθετη προς την ΑΒ ,η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ.Να αποδειχτεί ότι
α)$ΜΔ^2=ΔΑ\ ΔΒ$
β)$ΜΓ^2+ΜΔ^2=2(R^2+ΟΔ^2)$

43.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=10, ΑΓ=12, ΒΓ=11. Αν χ είναι η προβολή της διαμέσου $μ_α$ πάνω στην πλευρά α να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος χ.

44.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $Α=60^0$,β=5 ,γ=3.Να αποδείξετε ότι $μ_α=\frac{7}{2}$

45.Ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα R.Αν Μ είναι ένα τυχαίο σημείο να αποδείξετε ότι $ΜΑ^2+ΜΒ^2+ΜΓ^2+ΜΔ^2=8R^2$.

Επιμέλεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

46.Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε της βάσης ΒΓ ώστε ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ.Να αποδείξετε ότι $ΑΒ^2=ΑΕ^2+2ΔΕ^2$.

47.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ(ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=α,ΒΓ=β, ΓΔ=γ , ΔΑ=δ και ΑΓ=κ ,ΔΒ=λ.Να δειχτεί ότι $κ^2+λ^2= β^2+δ^2+2αγ$

48.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Θ,Η τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ αντίστοιχα.Αν Κ είναι το μέσο της ΘΗ ,να δειχτεί ότι $β^2-γ^2=2(ΚΓ^2-ΚΒ^2)$

49.Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ,τα ύψη του ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ και ονομάζουμε Η το ορθόκεντρο του.Να αποδειχτεί ότι ΑΗ ΑΔ= $\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2}$

50.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $Α<90^0$,την διάμεσο του ΑΜ και το ύψος του ΒΔ.Να αποδειχτεί ότι : $ΑΜ^2=ΜΒ^2+ΑΔ\ ΑΓ$ (Αν είναι $Α>90^0$ τότε ισχύει $ΑΜ^2=ΒΜ^2-ΑΔ\ ΑΓ$)

51.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ=3,ΒΓ=8 και $Γ=60^0$.Να υπολογίσετε τα μήκη της πλευράς ΑΒ και της διαμέσου ΑΜ.

52.Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $β^2+γ^2=2α^2$,να αποδείξετε ότι για τις διαμέσους του τριγώνου ισχύουν οι σχέσεις

α)$μ_β^2+μ_γ^2=2μ_α^2$

β) $\frac{\mu_\alpha}{\alpha}=\frac{\mu_\beta}{\gamma}=\frac{\mu_\gamma}{\beta}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

επιμέλεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

53.Αν G το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ ,να αποδειχτεί ότι $GA^2+GB^2+G\Gamma^2=\frac{1}{3}\ (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

54.Να αποδειχτεί ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ(Α=90) ισχύουν οι σχέσεις

α)$\beta\ \gamma= \alpha\ \upsilon_\alpha$

β)$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha^2}$

55.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($A=90^0$).Εστω Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ.Αν Ε είναι η προβολή του Δ στη ΒΓ,να αποδείξετε ότι $E\Gamma^2 - EB^2 = A\Gamma^2$

56.Εστω ΣΑΒ και ΣΓΔ δύο τέμνουσες ενός κύκλου τέτοιες ώστε ΑΒ=9 ,ΣΓ=4 και ΓΔ=5.

Α)Να υπολογίσετε το τμήμα ΣΑ

Β)Αν το ΣΕ είναι εφαπτόμενο τμήμα ,να βρείτε το μήκος του.

Γ)Αν η ακτινα του κύκλου είναι $R=\sqrt{13}$,πόσο απέχει το Σ από το κέντρο Ο του κύκλου.

57.Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ)είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R).Η ευθεία του ύψους ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε.Αν ΑΒ=ΑΓ=10 και ΒΓ=12,να βρείτε:α) το μήκος του τμήματος ΔΕ

β)την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

58.Στην προέκταση της διαμέτρου ΑΒ ,προς το σημείο Β ,ενός κύκλου με κέντρο Ο παίρνουμε ένα σημείο Δ.Από το Δ φέρνουμε την εφαπτομένη ΔΓ του κύκλου.Αν ΑΔ =2ΓΔ,να αποδέιξετε ότι ΑΒ=3ΒΔ

Επιμέλεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

59.Δύο χορδές ΑΓ και ΒΔ ενός ημικυκλίου ΑΟΒ με κέντρο Ο ,τέμνονται στο σημείο Ε.Να αποδείξετε ότι $ΑΒ^2$=ΑΕ ΑΓ +ΒΕ ΒΔ

60.Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=8 και ΑΓ=12. Ένας κύκλος διέρχεται από τα σημεία Β και Γ και τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα .Αν ΒΔ=5 να βρείτε το μήκος του τμήματος ΕΓ.

61.Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) το εξωτερικό του σημείο Ρ, την τέμνουσα ΡΑΒ και το εφαπτόμενο τμήμα ΡΓ του κύκλου (Ο,R).Τότε
α)Αν είναι R=$4\sqrt{3}$,(ΟΡ)=20 ,(ΡΑ)=16 να υπολογιστεί το ΑΒ
β)Αν είναι ΡΑ=4,ΑΒ=5 να υπολογιστει το ΡΓ
γ)Αν είναι ΟΡ=45,ΡΑ=36,ΡΒ=50 να υπολογιστει το R
δ)Αν είναι ΟΡ=8,R=4 ,ΑΒ =2ΡΑ να υπολογιστεί το ΡΑ

62.Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και τις χορδές ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται στο σημείο Ρ.Τότε :
α)Αν είναι ΑΒ=21,R=$\sqrt{46}$,(ΟΡ)=6 να υπολογιστούν τα ΡΑ,ΡΒ
β)Αν είναι R=13,ΟΡ=11,και ΡΑ =3ΡΒ να υπολογιστούν τα ΡΑ και ΡΓ ΡΔ
γ)Αν είναι ΑΒ=15,ΡΒ=5,ΡΓ=2 ΡΔ να υπολογιστούν τα ΡΓ,ΡΔ.

63.Από σημείο Ρ εξωτερικό του κύκλου (Ο,R) φέρνουμε τις τέμνουσες ΡΑΒ,ΡΓΔ του κύκλου .Τότε :
α) Αν είναι ΡΑ =4 ,ΑΒ=21 και ΓΔ=3ΡΓ να υπολογιστεί το ΡΔ
β)Αν είναι ΡΑ =3 ,ΑΒ=1 και ΓΔ=4 να υπολογιστεί το ΡΓ
γ)Αν είναι ΑΒ=2,ΓΔ=6,ΣΓ=3 ,ΣΔ=6 όπου Σ το σημείο τομής των χορδών ΑΔ,ΒΓ να υπολογιστούν τα ΣΑ,ΣΒ.

64.Δίνεται κύκλος (Κ,ρ) και φέρουμε τη διάμετρο ΑΒ και τυχαία χορδή ΑΓ.Αν από το μέσο Μ της ΑΚ φέρουμε την $Μ\Delta \perp ΑΚ$,που τέμνει την ΑΓ στο Δ, να δειχτεί ότι ΑΓ ΑΔ $=\rho^2$.

65.Από ένα σημείο Μ εξωτερικό ενός κύκλου φέρουμε την τέμνουσα ΜΒΚΑ και την εφαπτομένη ΜΓ.Αν η $ΜΘ \perp ΜΑ$ τέμνει την ΑΓ στο Θ, να δειχτεί ότι $ΜΑ^2 – ΜΓ^2 = ΑΓ\ ΑΘ$.

66.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και Θ το κέντρο βάρους του.Αν η διάμεσος ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο Η , να δειχτεί ότο ΘΑ ΘΗ $=\frac{1}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

67.Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ,ΓΖ που τέμνονται στο Η.Να αποδειχτεί ότι :
$\alpha^2 = ΒΗ\ ΒΕ +ΓΗ\ ΓΖ$

68.Θεωρούμε κύκλο (O,R) ,την διάμετρο του ΑΒ και τις χορδές ΑΓ,ΒΔ που τέμνονται στο Ε.Να αποδειχτεί ότι $ΑΕ\ ΑΓ +ΒΕ\ Β\Delta =ΑΒ^2$.

69.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ=4 .Η διάμεσος ΑΜ, προεκτεινόμενη τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Ε.Να υπολογίσετε το γινόμενο ΑΜ ΜΕ.

70.Φέρνουμε μια χορδή ΑΒ ενός κύκλου με κέντρο Ο και το απόστημα ΟΜ αυτής .Μια άλλη χορδή ΓΔ του κύκλου διέρχεται από το Μ. Να αποδείξετε ότι
$ΑΒ^2= 4ΜΓ\ Μ\Delta$

Επιμέλεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

71.Δύο κύκλοι (K,R) και $(\Lambda, \frac{R}{2})$ εφάπτονται εσωτερικά στο Α .Από ένα σημείο Μ του μικρού κύκλου φέρνουμε μια χορδή ΓΔ του μεγάλου .Να αποδειχτεί ότι
$M\Gamma\ M\Delta = MA^2$.

72.Τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ έχουν λόγο $\sqrt{2}$.Να αποδειχτεί ότι οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ διαιρούν τη διαγώνιο αυτή σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

73.Αν Ε,Ζ είναι αντίστοιχα τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ ,ΒΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ να αποδειχτεί ότι :
$AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2 + 4EZ^2$

74.Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι α=8, β=6 , γ=5
α)Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο
β)Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς ΑΒ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ.

Β' ΟΜΑΔΑ

1.Για τις πλευρές α,β,γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} = \frac{2\alpha}{\beta}$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

2.Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $A=90^0$,να αποδείξετε ότι $\upsilon_\alpha=\frac{2\tau(\tau-\alpha)}{\alpha}$.

3.Σ' ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ είναι ΑΒ=30 ,ΓΔ=45 ΑΔ=9 και ΒΓ=12.Να υπολογίσετε :
α)τα μήκη των προβολών των πλευρών ΑΔ και ΒΓ πάνω στην πλευρά ΓΔ.
β)το ύψος του τραπεζίου

4.Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ το σημείο Ρ είναι εσωτερικό . Να αποδείξετε ότι $PA^2+P\Gamma^2 = PB^2 + P\Delta^2$

5.Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($A=90^0$)οι διάμεσοι του τέμνονται στο Θ.Να αποδειχτεί ότι:
α)$\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2=5\mu_\alpha^2$
β)$\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2 = \frac{3}{2}\alpha^2$

6.Δίνεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου AB=2R . Στην προέκταση μιας τυχαίας χορδής ΑΓ προς το σημείο Γ θεωρούμε ένα σημείο Δ.Να αποδείξετε ότι :
$A\Delta^2 - B\Delta^2 = 2A\Delta\, A\Gamma - 4R^2$.

7.Το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές με ΑΔ=ΒΓ.Να αποδείξετε ότι:α)ΑΒ-2ΒΛ=ΔΓ
β)$A\Gamma^2 - B\Gamma^2 = AB\,\Delta\Gamma$

Επιμέλεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

8.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\gamma=6$,$\beta=10$,$\alpha=14$.Να βρείτε:
α)το είδος του τριγώνου
β)την προβολή της ΑΓ πάνω στην ΑΒ.
γ)την γωνία Α.

9.Σε ένα οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) φέρνουμε το ύψος ΓΔ.Να αποδείξετε ότι $ΒΓ^2=2ΑΒ\ ΒΔ$

10.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $Α+Β=60^0$.Να αποδείξετε ότι $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$

11.Εστω μια χορδή ΑΒ ενός κύκλου (Ο,R) και Γ ένα τυχαίο σημείο της . Να αποδείξετε ότι $ΟΓ^2=R^2 - ΓΑ\ ΓΒ$

12.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta>\gamma$.Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ,να αποδείξετε ότι $\beta^2 - \gamma^2 =3(ΘΓ^2 - ΘΒ^2)$.

13.Αν Κ είναι το μέσο της διαμέσου ΑΜ ενός τριγώνου να αποδείξετε ότι $\beta^2 + \gamma^2 =ΚΒ^2 + ΚΓ^2 + \frac{3}{2}\mu_\alpha^2$.

14.Εκατέρωθεν της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ
α)να εκφράσετε το μήκος του τμήματος ΔΕ ως συνάρτηση της πλευράς α του τριγώνου ΑΒΓ.
β)Να αποδείξετε ότι $ΑΔ^2+ΑΕ^2 = \alpha^2 + \beta^2 +\gamma^2$.

15.Εστω ΑΒΓΔ ένα ορθογώνιο και Σ τυχαίο σημείο του επιπέδου .Να αποδειχτεί ότι :
α)$ΣΑ^2+ΣΓ^2=ΣΒ^2+ΣΔ^2$.
β)$ΣΑ^2+ΣΒ^2+ΣΓ^2+ΣΔ^2 =ΑΓ^2 + 4ΣΟ^2$.

Επιμέλεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

16.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με διαμέσους ΑΜ $=\mu_\alpha$ ΒΔ$=\mu_\beta$ και ΓΕ $=\mu_\gamma$ τέτοιες ώστε $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$.
Να αποδειχτεί ότι $\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2=\mu_\alpha^2$.

17.Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος και το ΒΔ είναι ύψος .Να αποδειχτεί ότι :

α)$ΑΓ\ ΑΔ = \frac{1}{2}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)$

β)$ΑΜ^2 - ΒΜ^2 = ΑΔ\ ΑΓ$

18.Η διάμεσος ΒΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Ε.Να αποδειχτεί ότι $ΒΑ^2+ΒΓ^2+ΕΑ^2+ΕΓ^2 =2ΒΕ^2$.

19.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta^2+\gamma^2 =2\alpha^2$.Η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Δ.Να αποδειχτεί ότι :

α)$ΑΜ=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ β)$ΜΔ=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

20.Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ΑΒ^3+ΑΓ^3=ΒΓ^3$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι οξυγώνιο.

21.Αν Μ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του εγγεγραμμένου κύκλου ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α,να αποδειχτεί ότι:$ΜΑ^2+ΜΒ^2+ΜΓ^2=\frac{5}{4}\alpha^2$.

10_o ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1.Δίνεται ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ,Λ ,Μ,Ν των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ αντίστοιχα.Αν το εμβαδό του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ είναι $50m^2$,να υπολογίσετε το εμβαδό του ορθογωνίου.

2.Εστω Δ τυχαίο σημείο της διαμέσου ΒΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ.Να αποδείξετε ότι $E_{ΔΒΑ}=E_{ΔΒΓ}$.

3.Εστω Ε ένα τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΒ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.Να αποδείξετε ότι $E_{ΕΑΓ}+ E_{ΕΒΔ} = \frac{1}{2} E_{ΑΒΓΔ}$

4.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΓ=2ΒΓ.Αν ΑΔ,ΒΕ είναι ύψη του τριγώνου αυτού ,να αποδείξετε ότι ΑΔ=2ΒΕ.

5.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα τυχαίο σημείο Ι της διαγωνίου ΒΔ.Από το σημείο Ι φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ ,οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ,ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ και τις ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Η και Θ αντίστοιχα .Να αποδείξετε ότι : $E_{ΑΕΙΗ}=E_{ΙΘΓΖ}$

6.Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι Α =Δ =90^0,ΑΔ=ΑΒ=3 και ΒΓ=5.Να υπολογίσετε:
α)το εμβαδό του τραπεζίου
β)την απόσταση d του σημείου Α από την ευθεία ΒΓ.

7.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοι ΒΔ και ΓΕ αυτού, οι οποίες τέμνονται στο Θ.Να αποδείξετε ότι:
α) (ΑΒΔ)=(ΑΓΕ)
β) (ΘΒΓ)=(ΑΕΘΔ)
γ) (ΘΒΒ)=(ΘΔΓ)

Επιμέλεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

8.Δίνεται ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Μ και Ν των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.Να αποδείξετε ότι $E_{ΑΝΔ} + E_{ΓΒΜ} = E_{ΔΑΜ} + E_{ΒΓΝ}$

9.Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.Στις προεκτά – σεις των ημιευθειών ΑΒ και ΒΓ παίρνουμε τυχαία τα Ε και Ζ .Να αποδείξετε ότι (ΕΔΓ)= (ΑΔΖ).

10.Δίνεται ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ .Το ημικύκλιο με διάμετρο την πλευρά ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.Οι ευθείες ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Η και η ΑΗ τέμνει την ΒΓ στο σημειο Θ.Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ

β)τα τρίγωνα ΑΘΒ και ΗΘΓ είναι όμοια

γ)ΘΑ ΘΗ = ΘΒ ΘΓ

δ)αν Ι είναι το σημείο τομής της ΑΘ και του ημικυκλί- ου τότε $ΙΘ^2$ = ΘΒ ΘΓ

ε)$(ΒΙΓ)^2$ = (ΑΒΓ) (ΒΗΓ)

11.Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 14 και διαγώνιο ΒΔ=5.Να υπολογιστεί το εμβαδό του.

12.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^o$).Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζω ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΓΕ.

α)Να αποδειχτεί ότι τα σημεία Δ,Α,Ε είναι συνευθειακά

β)Αν β+γ=20 ,να αποδειχτεί ότι $E_{ΕΔΒΓ}$=100 τ. μ

Επιμέλεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

13.Σε τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΜ είναι κάθετη και ίση με την πλευρά ΑΒ και η πλευρά ΒΓ είναι ίση με 8.Να αποδειχτεί ότι :
α)$E_{ABM} = E_{AM\Gamma}$ β)$E_{AB\Gamma} = 8$.

14.Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^0) ,Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ και Ν σημείο της ΑΓ τέτοιο ώστε 3ΓΝ = ΑΓ. Να αποδειχτεί ότι :$E_{MNB} = \frac{1}{3} E_{AB\Gamma}$

15.Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ,θεωρώ ΑΚ το ύψος και σημεία Ε της ΑΔ και Ζ της ΒΓ τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ και ΒΓ=10 ,ΑΚ=5
α)Να υπολογιστεί το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
β)Να αποδειχτεί ότι $E_{AEZB}=E_{EZ\Gamma\Delta}=25$ τ.μ

16.Αν Ο είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ να αποδειχτεί ότι :
$$(AOB) + (\Delta O\Gamma) = (AO\Delta) + (BO\Gamma)$$

17.Στο εξωτερικό ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α=90^0) κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ , ΒΓΔ, ΑΓΖ.Να αποδείξετε ότι (ΑΒΕ) + (ΑΓΖ) = (ΒΓΔ).

18.Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοι ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο Θ.Να αποδειχτεί ότι : (ΘΒΓ) = (ΑΕΘΔ).

19.Μια ευθεία παράλληλη στην πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.Οι ευθείες ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο Ι.Να αποδείξετε ότι :α) (ΔΙΒ) = (ΕΙΓ)
β) (ΑΔΓ) = (ΑΕΒ).

Επιμέλεια : ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

20.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Μ,Ν τα οποία χωρίζουν τη διαγώνιο ΒΔ σε τρία ίσα μέρη (ΔΜ=ΜΝ=ΝΒ).
Να αποδείξετε ότι :
α)το τετράπλευρο ΑΜΓΝ είναι παραλληλόγραμμο.
β)(ΑΜΓΝ)=$\frac{1}{3}$(ΑΒΓΔ).

21.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=4,ΑΓ=6 και Α=30^0.
Να υπολογιστούν :
α)το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ
β)τα ύψη $υ_β$ και $υ_γ$.

22.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.Αν ρ,R είναι αντίστοιχα οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρος του,να αποδειχτεί ότι :
α)α β γ =4 τ ρ R
β)$2R\rho = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$

23.Να αποδέιξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $E=2R^2\frac{\upsilon\alpha\upsilon\beta\upsilon\gamma}{\alpha\beta\gamma}$

24.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι β+γ=2α Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου ,τότε να αποδειχτεί ότι :
α)β γ =6 ρ R
β)$\frac{1}{\upsilon\alpha} + \frac{1}{\upsilon\beta} = \frac{2}{\upsilon\gamma}$

25.Ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α=90^0) εφάπτεται της υποτείνουσας στο σημείο Δ.
Να αποδείξετε ότι :

α)ΔΒ = τ-γ   και   ΔΓ=τ-β
β)$E_{ABΓ}$ = ΔΒ ΔΓ

26.Το εμβαδό ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τη σχέση Ε=(τ-β)(τ-γ).Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

27.Δίνονται 3 διαδοχικές γωνίες xOy = yOz=zOx=120^0 Θεωρούμε τα σημεία Α της Οχ ,Β της Οy,Γ της Οz τέτοια ώστε ΟΑ=1,ΟΒ=4,ΟΓ=8.Να υπολογιστεί το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

28.Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει β γ =α $υ_α$ να αποδειχτεί ότι Α=90^0.

29.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι β=6,γ=5 και Ε=15 τ.μ Ν α βρείτε τη γωνία Α.

30.Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση
$(υ_α+υ_β+υ_γ)(\frac{1}{υα}+\frac{1}{υβ}+\frac{1}{υγ}) = (α+β+γ)\ (\frac{1}{α} + \frac{1}{β} + \frac{1}{γ})$

31.Να αποδειχτεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\frac{1}{αβ} + \frac{1}{βγ} + \frac{1}{γα} = \frac{1}{2ρR}$

32.Να αποδειχτεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις :
α) α β +β γ +γ α =$τ^2 + ρ^2 + 4Rρ$
β) $α^2 + β^2 + γ^2 = 2τ^2 - 2ρ^2 - 8ρR$
γ) $\frac{1}{υα} + \frac{1}{υβ} + \frac{1}{υγ} = \frac{1}{ρ}$

Επιμέελεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

33.Οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ ενός τυχαίου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ σχηματίζουν γωνία 30^0.(ΑΟΒ=30^0 όπου Ο το σημείο τομής των διαγωνίων).Να αποδέιξετε ότι

α)$E_{AO\Delta}=\frac{1}{4}O\Delta\ OA$

β)$E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{1}{4}\ A\Gamma\ \Delta B$

34.Σε τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ,ΑΓ=δ_1 ,ΒΔ=δ_2 και ΑΟΒ=ω.Να αποδειχτεί ότι $E_{AB\Gamma\Delta}=\frac{1}{2}\delta_1\delta_2$ημω

35.Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι :

$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma = \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{2R}$$

36.Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι :

$$\frac{\upsilon\alpha+\upsilon\beta}{\upsilon\gamma} + \frac{\upsilon\gamma+\upsilon\alpha}{\upsilon\beta} + \frac{\upsilon\beta+\upsilon\gamma}{\upsilon\alpha} = 6.$$

37.Το ΑΒΓΔ είναι ένα κυρτό τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) με ΑΒ=α ,ΒΓ=β ,ΓΔ=γ,ΔΑ=δ ,ΑΓ=χ ,ΒΔ=ψ.Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{y} = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta}$

38.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=20 και $\upsilon_\alpha=\frac{4}{5}$α. Ένα άλλο τρίγωνο ΔΕΖ ,όμοιο με το ΑΒΓ έχει Δ=Α και υ_δ=24.Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΔΕΖ.

39.Έστω ΑΔ το ύψος ενός ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα ΒΓ . Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{AB^2}{A\Gamma^2}=\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$$

40.Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ(Α=90^0). Με πλευρές τις α,β,γ του τριγώνου κατασκευάζουμε κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών . Αν $E_α$, $E_β$ και $E_γ$ είναι αντίστοιχα τα εμβαδά των πολυγώνων αυτών ,να αποδείξετε ότι $E_β + E_γ = E_α$

41.Στο εξωτερικό ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α=90^0) κατασκευάζουμε τα όμοια τρίγωνα ΑΔΒ , ΑΓΕ,ΒΓΖ με Δ=Ε=Ζ.Να αποδείξετε ότι :

$$E_{ΑΒΔ}+E_{ΑΓΕ}=E_{ΒΓΖ}$$

42.Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ ,ένα σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ και το μέσο Μ της πλευράς ΑΓ.Η παράλληλη από το σημείο Β προς την ΔΜ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.Να αποδείξετε ότι η ΔΕ χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο ισοδύναμα μέρη ,δηλαδή (ΕΔΑ) = (ΒΔΕΓ).

43.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδό Ε=27.Στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ θεωρούμε αντίστοιχα τα τμήματα ΑΔ=$\frac{2}{3}$ΑΒ και ΑΕ=$\frac{1}{3}$ ΑΓ. Να βρεθεί το εμβαδό του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ.

44.Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ .Στο εξωτερικό του τριγώνου κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΑΓΖΗ.Να αποδείξετε ότι (ΑΒΓ) = (ΑΕΗ).

45.Για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ ,ισχύει Α=Α′ και Β+Β′=180^0.Να αποδειχτεί ότι $\frac{a}{a'}=\frac{\beta}{\beta'}$

46.Το σημείο Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και το σημείο Η είναι το μέσο της ΔΓ του παραλληλογράμμου

ΑΒΓΔ.Αν το Μ είναι ένα τυχαίο σημείο του τμήματος ΗΖ και το εμβαδό του ΑΒΓΔ είναι 20 να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΜΒΓ.

47.Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδό 90 cm^2 .Από ένα σημείο Μ του ύψους ΑΔ τέτοιο ώστε ΑΜ=2ΜΔ. Φέρνουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα .

Να αποδειχτεί ότι : α) $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$

β) $E_{AEZ}=40\,cm^2$

48.Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ(ΑΒ//ΓΔ) οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Σ.Να αποδείξετε ότι

$$\frac{(\Sigma AB)}{(\Sigma B\Gamma)} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$$

49.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ=2ΑΒ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ και τις $BE \perp A\Delta$ και $\Gamma Z \perp A\Delta$.Να αποδείξετε (ΓΔΖ) = 4(ΒΔΕ).

50.Προεκτείνουμε τις πλευρές παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και στις προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα ΑΕ=ΑΔ, ΒΖ=ΒΑ ,ΓΗ=ΓΒ και ΔΘ=ΔΓ. Να αποδείξετε ότι: α)το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλογραμμο β)το εμβαδό του ΕΖΗΘ είναι πενταπλάσιο του εμβαδού του ΑΒΓΔ.

51.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ .Από ένα σημείο Ο εσωτερικό του ΑΒΓ φέρνουμε κάθετες στις ΑΒ ,ΒΓ,ΓΑ και πάνω σε αυτές παίρνουμε τμήματα ΟΔ=ΑΒ, ΟΕ=ΒΓ , ΟΖ=ΓΑ αντίστοιχα .Να αποδειχτεί ότι :

α)$E_{\Delta OE}=E_{AB\Gamma}$ β)$E_{\Delta EZ}=3E_{AB\Gamma}$

Επιμέλεια: ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

52.Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^0$) και τρία πολυγώνα $ρ_1$,$ρ_2$,$ρ_3$ όμοια μεταξύ τους ,που έχουν ως ομόλογες πλευρές τις ΒΓ ,ΓΑ ,ΑΒ αντιστοιχα.Να αποδειχτεί ότι : $E_{ρ3} + E_{ρ2} = E_{ρ1}$.

53.Οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ ενός τετράπλευρου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο.Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{ΑΟ}{ΟΓ} = \frac{(ΑΒΔ)}{(ΓΒΔ)}$$

54.Το άθροισμα των αποστάσεων κάθε εσωτερικού σημείου Μ από τις πλευρές τις ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με το ύψος του τρίγωνου.

55.Να υπολογίσετε το εμβαδό ρόμβου ΑΒΓΔ στις εξής περιπτώσεις :
α)ΑΒ=10 και ΑΓ=16
β)ΑΒ=α και $Α=45^0$

56.Να υπολογίσετε το εμβαδό τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) στις εξής περιπτώσεις :
α)$Α=Δ=90^0$ και $Β=120^0$ και ΒΓ=ΓΔ=α
β)ΑΒ=4,ΓΔ=10 ,ΑΔ=ΒΓ=5

57.Να υπολογιστεί το εμβαδό τριγώνου ΑΒΓ όταν ΒΓ=α, $Β=45^0$ και $Γ=30^0$.

58.Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ=4 ,ΑΔ=3, $ΓΔ=2\sqrt{10}$,ΑΓ=7 και ΒΔ=5.Αφού διαπιστώσετε ότι το τετράπλευρο αυτό είναι ορθογώνιο τραπέζιο να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Επιμέλεια : ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

59.Να αποδείξετε ότι κάθε κυρτό τετράπλευρο έχει διπλάσιο εμβαδό από το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα μέσα των πλευρών του.

60.Να υπολογιστεί το εμβαδό τραπεζίου ΑΒΓΔ με ΑΒ=4,ΓΔ=8 και μη παράλληλες πλευρές ΑΔ=5 και ΒΓ=7.

61.Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ(ΑΒ//ΓΔ)φέρνουμε το ύψος ΑΕ.Να αποδείξετε ότι:

$E_{ΑΒΓΔ}=2E_{ΕΑΓ}$

62.Αν Μ το μέσο της πλευράς ΑΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ να αποδείξετε ότι $E_{ΜΒΓ} = \frac{1}{2} E_{ΑΒΓΔ}$

63.Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ(ΑΒ//ΓΔ),τα μέσα Κ,Λ των ΑΒ,ΓΔ και Ρ τυχαίο σημείο του τμήματος ΚΛ.Να αποδειχτεί ότι (ΡΑΔ) = (ΡΒΓ).

64.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από το μέσο Κ της διαγωνίου ΒΔ φέρνουμε τυχαία ευθεία ΕΖ ,που τέμνει τις ΑΒ ,ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα .Να δειχτεί ότι (ΑΕΖΔ) = (ΒΓΖΕ).

65.Αν Κ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων τραπεζίου ΑΒΓΔ(ΑΒ//ΓΔ),να δειχτεί ότι (ΑΚΒ)(ΓΚΔ)=(ΑΚΔ)(ΒΚΓ)

66.Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΔΑ,ΕΒ,ΖΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ΑΚ=ΑΔ,ΒΛ=ΒΕ,ΓΜ=ΓΖ.Να δειχτεί ότι (ΚΛΜ) $= \frac{25}{4}$(ΑΒΓ).

67.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^0$) με ΑΓ=β ,ΑΒ=γ και με υποτείνουσες τις κάθετες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του ΑΒΓ ,τα ισοσκελή και ορθογώνια τρίγωνα ΘΑΒ και ΗΑΓ .Να δειχτεί ότι 4(ΒΘΗΓ) = $(\beta+\gamma)^2$.

68.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) του οποίου οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Κ . Να δειχτεί ότι $(ΚΒΓ)^2$ = (ΚΑΒ) (ΚΓΔ).

69.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=27,ΓΔ=6, ΑΔ=13,ΒΓ=20.Να βρεθεί η προβολή της ΑΔ στην ΑΒ και το εμβαδό του τραπεζίου.

70.Αν για τις πλευρές α,β,γ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει α+γ=2β,να δειχτεί ότι $\rho R=\frac{1}{6}\alpha\gamma$.

71.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε τη ΖΗ//ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα . Να δειχτεί ότι : $(ΑΗΒ)^2$ = (ΑΒΓ)(ΑΖΗ)

72.Δίνεται τετράπλευρο ΚΛΜΝ περιγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ).Να δειχτεί ότι ισχύει:

$$\frac{ΟΚ^2}{ΟΜ^2} = \frac{ΚΛ \cdot ΚΝ}{ΜΛ \cdot ΜΝ}$$

73.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό του φέρουμε τις $ΜΔ \perp ΒΓ$,$ΜΕ \perp ΑΓ$ και $ΜΖ \perp ΑΒ$.Αν υ_α, υ_β, υ_γ είναι τα ύψη του ΑΒΓ ,να δειχτεί ότι $\frac{ΜΔ}{\upsilon_\alpha} + \frac{ΜΕ}{\upsilon_\beta} + \frac{ΜΖ}{\upsilon_\gamma} = 1$.

Επιμέλεια : ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ   ΠΕΤΡΟΣ

74.α)Ας είναι ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ τα ύψη οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ και Η το ορθόκεντρο του.Να αποδειχτεί ότι :

$$\frac{H\Delta}{\upsilon_\alpha} + \frac{HE}{\upsilon_\beta} + \frac{HZ}{\upsilon_\gamma} = 1$$

β)Αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο με Α >90^0 να αποδειχτεί ότι:

$$\frac{H\Delta}{\upsilon_\alpha} - \frac{HE}{\upsilon_\beta} - \frac{HZ}{\upsilon_\gamma} = 1$$

75.Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΓ,ΓΑ,ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ και παίρνουμε αντίστοιχα τα ευθύγραμμα τμήματα

ΓΔ=ΒΓ ,ΑΕ=ΓΑ ,ΒΖ= ΑΒ

Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΔΕΖ και ΑΒΓ.

76.Μια ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα .Να αποδείξετε ότι :

$$E^2_{AB E} = E_{A\Delta E}\, E_{AB\Gamma} = E^2_{A\Gamma\Delta}$$

77.Προεκτείνουμε τις διαμέσους ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ τριγώνου ΑΒΓ προς το μέρος κάθε κορυφής και παίρνουμε αντίστοιχα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΗ=ΑΔ ,ΒΘ=ΒΕ και ΓΚ=ΓΖ. Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τριγώνων ΗΘΚ και ΑΒΓ.

78.Στις πλευρές ΑΒ,ΒΓ ,ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ,Ε,Ζ τέτοια ώστε να είναι $A\Delta=\frac{2}{3}AB$, $BE=\frac{1}{4}B\Gamma$, $\Gamma Z=\frac{1}{2}A\Gamma$.

Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΔΕΖ συναρτήσει των πλευρών α,β,γ του τριγώνου ΑΒΓ.

79.Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ,να αποδείξετε ότι :

$$E_{AMN} = \frac{3}{8} E_{AB\Gamma\Delta}$$

80.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΚ.Αν είναι Γ=45^0 ,η γωνία ΚΑΒ=30^0 και ΒΓ=18 ,να βρεθεί το εμβαδό του ΑΒΓ.

81.Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος του ΑΔ είναι το μισό της πλευράς ΒΓ και ΔΑΓ=60^0.Αν το εμβαδό του ΑΒΓ είναι 16 ,να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών και των υψών του τριγώνου.

82.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=48, ΒΓ=52 και ΑΓ=20. Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία επαφής του ΑΒΓ με τον εγγεγραμμενο κύκλο.

11_0 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1.Ένα αυτοκίνητο για να διανύσει μια απόσταση 9 Km και 420 m πρέπει ο τροχός του να φέρει 10.000 στροφές . Να βρείτε την διάμετρο του κύκλου

2.Δύο τόξα μ και ν ενός κύκλου (O,R) έχουν μέτρα 72^0 και $\frac{3\pi}{5}$ rad αντίστοιχα .Το μήκος του τόξου μ είναι 2π . Να βρείτε :
α) την ακτίνα του κύκλου
β)το μήκος του τόξου ν

3.Δύο κύκλοι (K,ρ_1) και (Λ,ρ_2) έχουν διάκεντρο ΚΛ=2, $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = \sqrt{3}$.
α)Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι τέμνονται
β)Να βρείτε το μήκος του καμπυλόγραμμου σχήματος που ορίζεται από τα σημεία τομής των κύκλων και τα δύο ελάσσονα τόξα των κύκλων.

4.Δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΑΓ ενός κύκλου (O,R) έχουν μήκη 6 cm και 8 cm αντίστοιχα.Να βρείτε :
α)την ακτίνα R του κύκλου
β)το μήκος ενός τόξου του κύκλου που αντιστοιχεί σε γωνία 3 rad.

5.Δίνεται ένας κύκλος (O,R) και μια ακτίνα του ΟΑ.Με διάμετρο την ΟΑ γράφουμε κύκλο κέντρου Κ.Φέρνουμε μια ημιευθεία από το σημείο Ο που τέμνει τον κύκλο κέντρου Ο στο σημείο Β και τον κύκλο κέντρου Κ στο σημείο Γ.Να αποδείξετε ότι τα τόξα ΑΒ και ΑΓ έχουν το ίδιο μέτρο.

Επιμέλεια : ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

6.Έστω ΑΒΓ ένα ορθογώνιο τρίγωνο ($Γ=90^0$) εγγεγραμμένο σε κύκλο .Αν ΑΓ=2 και ΒΓ $=2\sqrt{3}$ να βρείτε :

α)το μήκος του κύκλου

β)τα μήκη των ΑΓ και ΒΓ που αντιστοιχούν στις ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου.

7.Ενας κύκλος με κέντρο Κ εφάπτεται σε δύο ομόκεντρους κύκλος (O,R) και (O,ρ) με R>ρ.Να αποδείξετε ότι το μήκος του κύκλου με κέντρο Κ ισούται με την ημιδιαφορά των μηκών των κύκλων με ακτίνες R και ρ.

8.Ένα κανονικό εξάγωνο πλευράς 10 cm είναι εγγεγραμμένο σε έναν κύκλο .Να βρείτε το μήκος του κύκλου αυτου.

9.Να βρείτε το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά ενός κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 10 cm ,το οποίο έχει 144^0.

10.Σε έναν κύκλο (O, R) θεωρούμε τις διαδοχικές χορδές AB=R ,ΒΓ = $R\sqrt{2}$,ΓΔ=$R\sqrt{3}$.Να υπολογίσετε :

α)τις επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν στα τόξα ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ

β)τα μήκη των παραπάνω τόξων.

11.Ένα κανονικό δωδεκάγωνο έχει ακτίνα 2 cm και εμβαδό 12 cm^2.Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς και του αποστήματος .

12.Ένα κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R.Εξω από το εξάγωνο κατασκευάζουμε τετράγωνα με πλευρές τις πλευρές του εξάγωνου

α)Να αποδείξετε ότι οι κορυφές των τετραγώνων ,που δεν είναι κορυφές του εξαγώνου ,σχηματίζουν κανονικό δωδεκάγωνο.
β)Να υπολογίσετε το εμβαδό του δωδεκάγωνου συναρτήσει της ακτίνας R

13.Δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,3R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Μ.Έστω ΑΒ η κοινή εξωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων.Να υπολογίσετε :
α)τις γωνίες ΑΚΜ και ΒΛΜ
β)τα μήκη των τόξων ΑΜ και ΒΜ ως συνάρτηση της ακτίνας R.

14.Η πλευρά ενός ισό πλευρου τριγώνου ΑΒΓ είναι α=2$\sqrt{3}$ - 3.Με ακτίνα R=$\frac{a}{2}$ και κέντρα τις κορυφές του τριγώνου κατασκευάζουμε τρείς κύκλους .Να υπολογίσετε α)την ακτίνα του μικρού κύκλου που εφάπτεται εξωτερικά στους τρεις κύκλους .
β)το μήκος του μικρού αυτού κύκλου.

15.Να υπολογίσετε το μήκος του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου
α)ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές 3cm και 4 cm
β)ισόπλευρου τριγώνου πλευρά α.
γ)ισοσκελούς τριγώνου με βάση 12 cm και ίσες πλευρές 10 cm

16.Τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά α=$\sqrt{2}$ + 1 .Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\frac{a}{2}$ κατασκευάζουμε κύκλους .Να υπολογίσετε:

α)την ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται εξωτερικά των τεσσάρων τεταρτοκυκλίων.
β)το μήκος του παραπάνω κύκλου.

17.Να βρείτε το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ όπου ΒΓ=5 και ΑΓ=4.

18.Δίνεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ ενός κύκλου (O,R) .Με διαμέτρους τις ΟΑ και ΟΒ γράφουμε στο εσωτερικό του πρώτου ημικύκλια .Ένας κύκλος κέντρου Κ εφάπτεται συγχρόνως και των τριών ημικυκλίων.Να υπολογίσετε :α)την ακτίνα ρ του κύκλου αυτού .
β)το μήκος του κύκλου αυτου.

19.Με κέντρα τις κορυφές τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α και ακτίνα $\frac{a}{2}$ γράφουμε τεταρτοκύκλια μέσα στο τετράγωνο .Να υπολογίσετε το εμβαδό του καμπυλόγραμμου σταυρού που σχηματίζεται.

20.Τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι α=2 ,β=$\frac{5}{2}$ γ=3. Να υπολογίσετε το εμβαδό και το μήκος του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου αυτού.

21.Ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R).Στο τετράγωνο αυτό είναι εγγεγραμμένο ένας άλλος κύκλος (Ο,ρ).Να βρείτε :
α)την πλευρά και το εμβαδό του τετραγώνου
β)το εμβαδό που περικλείεται από τον (O,R) και το τετράγωνο.
γ)Το εμβαδό που περικλείεται από το τετράγωνο και τον κύκλο (Ο,ρ).

22.Δίνεται ένας κύκλος (O,R) και δύο χορδές του AB=R$\sqrt{2}$ και AΓ=R$\sqrt{3}$ που βρίσκονται εκατέρωθεν της διαμέτρου AOΔ.Να βρεθεί το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ.

23.Δίνεται ένα τόξο AB=60^0 ενός κύκλου (O,R).Στον κυκλικό τομέα OAB είναι εγγεγραμμένος ένας άλλος κύκλος (K,ρ).Να βρείτε το εμβαδό του κύκλου αυτού.

24.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ(A=90^0) .Με διαμέτρους τις BΓ,AB,AΓ γράφουμε ημικύκλια .Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των μηνίσκων που σχηματίζονται είναι ίσο με το εμβαδό του τριγώνου ABΓ.

25.Σε κύκλο είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α.Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται ανάμεσα στον κύκλο και στο τρίγωνο.

26.Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (O,R) και (O,ρ) με R>ρ και η χορδή AB του κύκλου (O,R) εφάπτεται στον κύκλο (O,ρ) στο σημείο Γ.Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E του κυκλικού δακτυλίου είναι ίσο με το εμβαδό του κύκλου που έχει διάμετρο τη χορδή AB.

27.Δίνεται ένας κύκλος (O, R) και τα διαδοχικά σημεία A,B,Γ έτσι ώστε να είναι AB=R$\sqrt{2}$,BΓ=R$\sqrt{3}$.Να βρεθούν :
α)τα μήκη των τόξων AB,BΓ,ΓA
β)το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ.

28.Θεωρούμε δύο κάθετες ακτίνες ΚΑ,ΚΒ ενός κύκλου (Κ,R) και τον κύκλο (Α,R) ο οποίος τέμνει το ελάσσον τόξο ΑΒ στο σημείο Γ.Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΚΒΓ.

29.Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από έναν κύκλο (Κ,R) και δύο παράλληλες χορδές του ΑΒ=R$\sqrt{2}$ και ΓΔ=R$\sqrt{3}$ οι οποίες βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Κ.

30.Δίνεται ένα τετράγωνο πλευράς α εγγεγραμμένο σε κύκλο.Φέρνουμε έναν κύκλο με κέντρο μια κορυφή του τετραγώνου και ακτίνα α.Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τους δύο αυτούς κύκλους , ως συνάρτηση της πλευράς α του τετραγώνου.

31.Με διαμέτρους τις πλευρές τετραγώνου πλευράς α γράφουμε ημικύκλια μέσα στο τετράγωνο.Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τετρά-φυλλου που σχηματίζεται.

32.Να υπολογίσετε το εμβαδό του κύκλου που είναι εγγεγραμμενο σε κυκλικό τομέα ακτίνας R και γωνίας 90^0.

33.Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^0) με Β=30^0 και ΑΓ=λ είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο κύκλου με κέντρο Ο και διάμετρο ΒΓ.Να βρείτε ως συνάρτηση του λ το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από το τρίγωνο και το ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ.

34.Δίνεται ένα τεταρτοκύκλιο με ακτίνες ΟΑ=ΟΒ=R .Με διαμέτρους ΟΑ και ΟΒ κατασκευάζουμε δύο ημικύκλια που τέμνονται στο σημείο Γ.Να αποδειχτεί ότι:

α)τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά

β) το εμβαδό του κοινού τμήματος των δύο ημικυκλίων είναι ίσο με το εμβαδό του καμπυλόγραμμου τριγωνου ΑΒΓ.

35.Ένα τετράγωνο με πλευρά 2α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.Με διαμέτρους τις πλευρές του τετραγώνου κατασκευάζουμε εξωτερικά του κύκλου ημικύκλια.Να βρείτε ως συνάρτηση του α το εμβαδό των τεσσάρων μηνίσκων που σχηματίζονται.

36.Στο εσωτερικό ενός ημικυκλίου διαμέτρου ΑΟΒ και ακτίνας ΟΑ=R γράφουμε δύο ημικύκλια διαμέτρων ΟΑ και ΟΒ.Ένας κύκλος (Κ,ρ)εφάπτεται των τριών ημικυκλίων .Να υπολογίσετε : α)την ακτίνα ρ του κύκλου με κέντρο Κ
β)το μήκος του κύκλου (Κ,ρ)
γ)το εμβαδό του χωρίου που περικλέιεται από τα ημικύκλια και τον κύκλο (Κ,ρ).

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

2000

ΘΕΜΑ 1^0

Α.1. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών , αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς, δηλαδή:$AB^2+A\Gamma^2=2AM^2+\frac{B\Gamma^2}{2}$

Α.2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<A\Gamma$ να συμπληρώσετε τη σχέση :$A\Gamma^2-AB^2=$………. Ώστε να εκφράζει το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων.

Β. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα Β1 καιΒ2.

Β.1. Σε τρίγωνοΑΒΓ δίνονται :$\beta=8$,$\gamma=6$ και $\mu_\alpha=5$.
Η πλευρά είναι ίση με:
Α.7, Β.4, Γ.10, Δ.9, Ε.11

Β.2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $\alpha=4$,$\beta=7$, $\gamma=5$, ΑΔ το ύψος και ΑΜ η διάμεσος .
Η προβολή ΔΜ της διαμέσου ΑΜ πάνω στην πλευρά α είναι ίση με:
Α.4, Β.8, Γ.8/3 Δ.5, Ε.3.

Επιμέλεια ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ.

ΘΕΜΑ 2^0

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ, ΑΒ<ΓΔ, Α=Δ=90^0,ΑΒ=4 , ΑΔ=3, ΒΓ=5.

Να υπολογίσετε:
α)την προβολή της ΒΓ πάνω στη ΔΓ
β)το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ
γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.

ΘΕΜΑ 3^0

Σε κύκλο (Ο,R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ΑΒ=15. Να υπολογίσετε:
α)την ακτίνα R του κύκλου
β) το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου(Ο,R)
γ) το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ
δ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο.

ΘΕΜΑ 4^0

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μια διάμετρός του ΑΒ.
Από ένα σημείο Μ του κύκλου , διαφορετικό των Α και Β , φέρουμε κάθετη στη διάμετρο ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ.Επί της ΑΒ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ=ΟΔ και φέρουμε τη ΜΓ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΜΔ^2=ΑΔ\ ΔΒ$
β) $ΜΓ\ ΓΕ=ΜΔ\ ΔΖ=R^2-ΟΔ^2$
γ)$ΜΓ^2+ΜΔ^2=2(R^2+ΟΔ^2)$
δ) $\frac{ΜΓ}{ΓΕ}+\frac{ΜΔ}{ΔΖ}=2\frac{R^2+ΟΔ^2}{R^2-ΟΔ^2}$

Επιμέλεια: ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

2001

ΘΕΜΑ 1_0

Α1

Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ,το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του ,είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα .

Α2

Να γράψετε στο τετράδιο σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. AB^2	1. $AB^2+B\Gamma^2$
	2. $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$
β. $A\Gamma^2$	3. $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$
	4. $B\Gamma\ B\Delta$
γ. $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$	5. $B\Gamma^2 - AB^2$
	6. $AB\ B\Gamma$

Β .

Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα Β1 και Β2.

Β1.Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ είναι:

α.2 β. $\sqrt{3}$ γ . $\sqrt{2}$ δ. $3\sqrt{2}$

B2.Το μήκος της πλευράς ΑΒ είναι :
α. $\sqrt{3}$ β.3 γ. $\sqrt{2}$ δ. $\sqrt{5}$

ΘΕΜΑ 2_0

Τα μήκη των πλευρών ενός τρίγωνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=6 ,ΒΓ=12 και ΓΑ =8

α.Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.

β.Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ

γ.Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

ΘΕΜΑ $3_{0.}$

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες χΟψ ,ψΟζ ,ζΟχ έτσι ώστε χΟψ =ψΟζ=150^0. Στις ημιευθείες Οχ ,Οψ,Οζ παίρνουμε τα σημεία Α,Β,Γ αντίστοιχα ώστε ΟΑ =2, ΟΒ=4 και ΟΓ=6.

α.Να υπολογίσετε το εμβαδό $E_{ΟΓΑ}$ του τρίγωνου ΟΓΑ

β.Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}}$

ΘΕΜΑ 4_0

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ=2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β ,θεωρούμε ένα σημείο Γ ,τέτοιο ώστε ΒΓ=2R. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ του ημικυκλίου .Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο Α τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓΕ στο Δ.

Επιμέλεια :ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

α.Να αποδείξετε ότι ΓΕ=2$\sqrt{2}$R.
β.Να αποδείξετε ότι ΓΑ ΓΟ =ΓΔ ΓΕ
γ.Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ συναρτήσει του R.
δ.Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ συναρτήσει του R.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2002

ΘΕΜΑ 1^0

Α1.Να αποδείξετε ότι το εμβαδό τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

Α2.Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη «ΣΩΣΤΟ « η «ΛΑΘΟΣ» δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α.Το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο,R) αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$

β.Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία :
$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ αν και μονο αν $A<90^0$.

γ.Το εμβαδό Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu B$.

δ.Σε κάθε κύκλο (Ο,R) το εμβαδό Ε κυκλικού τομέα μ^0 δίνεται από τον τύπο $E=\frac{\pi r R^2 \mu}{180}$

ε.Το 1_0 θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τον τύπο : $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu^2_\alpha}{2}$

Β.α.Να εγγραφεί κανονικό εξάγωνο σε κύκλο (Ο,R) και να αποδείξετε ότι $\lambda_6 = R$,όπου λ_6 η πλευρά του εξαγώνου.

β.Να αποδείξετε ότι $\alpha_6=\frac{R\sqrt{3}}{2}$ όπου α_6 το απόστημα του εξαγώνου.

ΘΕΜΑ 2_0

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α ,β ,γ και διάμεσο ΑΜ=μ_α.Αν ισχύει η σχέση $2\mu^2_\alpha - \beta\gamma = \frac{a^2}{2}$

α.να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$

β.να υπολογιστεί η γωνία Α.

ΘΕΜΑ 3_0

Στο σχήμα που ακολουθεί ,δίνεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΒΓ και ημιευθεία Βχ τέτοια ώστε η γωνία ΓΒχ να είναι 30^0 . Εστω ότι η Βχ τέμνει τον κύκλο στο Α . Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ , η οποία τέμνει τη Βχ στο Ρ.

Να αποδείξετε :

α.ΑΓ = R

β.$\frac{(\text{ΡΒΓ})}{(\text{ΡΑΓ})} = 4$

γ.ΡΓ = $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$

ΘΕΜΑ 4_0

Στο σχήμα που ακολουθεί , σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευρας 7 cm ,εγγράφουμε τετράγωνο ΕΖΗΘ έτσι ώστε :
ΑΕ=ΒΖ=ΓΗ =ΔΘ = 3 cm.

α.Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ

β.Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΖ και να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (Λ,ρ) στο τρίγωνο ΕΒΖ είναι ρ=1 cm.

γ. Εάν (Κ,R) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο ΕΖΗΘ να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του κύκλου (Κ,R) προς το εμβαδό του κύκλου (Λ,ρ).

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 1999

ΘΕΜΑ 1_0

Α.α. Πως εγγράφουμε τετράγωνο σε κύκλο (O,R)

β. Να αποδείξετε ότι για την πλευρά λ_4 και το απόστημα α_4 ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) ισχύουν οι τύποι:

$$\lambda_4 = R\sqrt{2} \qquad \text{και} \qquad \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Β.α.Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έχει πλευρά λ_4 απόστημα α_4 ,περίμετρο P_4 και εμβαδό E_4 . Αν $\lambda_4 = 6\sqrt{2}$ τότε να γράψετε στο τετράδιο σας τα μεγέθη της στήλης Α και δίπλα την αντίστοιχη σωστή τιμή από την στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
R	$3\sqrt{2}$
α_4	$24\sqrt{2}$
P_4	24
E_4	6
	$12\sqrt{2}$
	72

β.Αν το εμβαδό ενός τετραγώνου είναι 32 ,τότε η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι:

Α.$4\sqrt{2}$ Β.8 Γ.4 Δ.$8\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ 2_O

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε α=5 ,β=4 , γ=2:

α.Η γωνία ΒΑΓ του τριγώνου είναι:

Α.ορθή Β.αμβλεία Γ.οξεία

β.Υπολογίστε τη διάμεσο μ_α του τριγώνου ΑΒΓ.

ΘΕΜΑ 3_{O}

Η επίκεντρη γωνία ΑΟΒ του κυκλικού τομέα του διπλανού σχήματος είναι ορθή και η ακτίνα του είναι 6. Η κάθετη ευθεία στο μέσον Κ της ακτίνας ΟΑ τέμνει το τόξο του κυκλικού τομέα στο σημείο Γ.

α.Να δείξετε ότι η γωνία ΑΟΓ είναι 60^0.

β.Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου ΑΓ

γ.Ο λόγος του μήκους του τόξου ΑΓ προς το μήκος του τόξου ΓΒ είναι:

Α.3 Β.½ Γ.2 Δ.1/3

δ.Να υπολογίσετε το εμβαδό του κυκλικού τμήματος ΑΔΓΒ

ΘΕΜΑ 4_{0}

Το οικόπεδο ΑΒΓΔ του σχήματος έχει την πλευρά ΑΒ ίση με 55μ ,την πλευρά ΓΔ ίση με 25μ, την πλευρά ΑΔ ίση με 40μ και τις γωνίες Α και Δ ορθές.Πρέπει να χαραχθεί ένας δρόμος ΔΕΗΖ με ΔΕ//ΓΒ και ΖΗ//ΓΒ ο οποίος θα χωρίσει το οικόπεδο σε δύο τεμάχια ΑΕΔ και ΖΗΒΓ όπως στο σχήμα.

α. Να βρεθεί το εμβαδόν του οικοπέδου ΑΒΓΔ.

β.Να βρεθεί το εμβαδόν του τεμαχίου ΑΕΔ.

γ.Να βρεθεί το ΔΖ έτσι ώστε το τεμάχιο ΖΗΒΓ να έχει το ίδιο εμβαδόν με το τεμάχιο ΑΕΔ.

δ.Ποιο είναι το πλάτος του δρόμου ΔΕΗΖ στην περίπτωση γ;

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000

ΘΕΜΑ 1_0

Α.1 .Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΔ ,να αποδείξετε ότι το τετράγωνο μιας πλευράς ,η οποία βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία ,ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών ,ελαττωμένο κατά το διπλάσιο του γινομένου της μιας από τις πλευρές αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτήν,δηλαδή:

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma\ \Delta\Gamma$$

Α.2.Να συμπληρώσετε το κατάλληλο σύμβολο (= ,< ,>) στις παρακάτω προτάσεις:

α.Σε τρίγ ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2<\beta^2+\gamma^2$ αν και μονο αν Α…90^0

β.Σε τριγ ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2>\beta^2+\gamma^2$ αν και μόνο αν Α…90^0

γ.Σε τριγ ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ αν και μόνο αν Α…90^0

Β.1 Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Α.7 Β.8,3 Γ.65/14 Δ. $\sqrt{3}$ -1 Ε.33/14

Β.2 Στη στήλη Α δίνεται το είδος της γωνίας ενός τριγώνου και στη στήλη Β τριάδα αριθμών που μπορεί να είναι μήκη πλευρών τριγώνου. Να γράψετε τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α.$A>90^0$	1.$\alpha=5\kappa$,$\beta=4\kappa$,$\gamma=3\kappa$
β.$A<90^0$	2.$\alpha=7$, $\beta=4$,$\gamma=5$
γ.$A=90^0$	3.$\alpha=4$,$\beta=7$,$\gamma=9$
	4.$\alpha=6$,$\beta=8$,$\gamma=15$

ΘΕΜΑ 2_0

Στο διπλανό σχήμα δίνονται κύκλος κεντρου Ο με διάμετρο ΑΒ=8 , Κ το μέσο της ΑΟ και ΓΔ η χορδή που διέρχεται από το Κ με ΚΓ=3.

α.Να υπολογίσετε το ΚΔ.

β.Να υπολογίσετε το εφαπτόμενο τμήμα ΑΛ του κύκλου που γράφεται με διάμετρο την ΟΒ.

ΘΕΜΑ 3_0

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της πλευράς ΑΒ.Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το Β κατά ευθύγραμμο τμήμα $ΒΔ=\frac{ΒΓ}{2}$ και φέρουμε την ΑΔ.

α.Να αποδείξετε ότι $(ΔΕΒ)=\frac{1}{2}(ΑΔΒ)$.

β.Να βρείτε τους λόγους $\frac{(ΔΕΒ)}{(ΑΒΓ)}$ και $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΓ)}$

γ.Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι (ΒΔΕ)=(ΑΜΕ)

ΘΕΜΑ 4_0

Τρείς κύκλοι (O_1,R_1) , (O_2,R_2) και (O_3,R_3) εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά στα σημεία Α,Β,Γ.

Αν $R_1=R_2=\sqrt{2}$ και $R_3=2-\sqrt{2}$:

α.Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο.

β.Να υπολογίσετε την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

γ.Να υπολογίσετε το εμβαδό του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2002

ΘΕΜΑ 1_0

Α.Να αποδείξετε ότι το εμβαδό Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.
Β.Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α.Έστω ΑΒ και ΑΓ χορδές ενός κύκλου.Αν οι χορδές αυτές ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ , τότε ισχύει:

$$ΡΑ\ ΡΔ = ΡΒ\ ΡΓ$$

β.Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου , τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

γ.Η γωνία κανονικού ν-γώνου είναι:

$$\varphi_\nu = 180^0 - \frac{360}{\nu}$$

δ.Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ,πλευράς λ_ν και αποστήματος α_ν ισχύει η σχέση $\lambda_\nu^2 + \frac{a_\nu^{\ 2}}{4} = R^2$.

Γ.Να γράψετε στο τετράδιο σας τα γράμματα της στήλης Ι και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης ΙΙ που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Ι:κανονικο πολύγωνο	Στήλη ΙΙ: πλευρά λ_ν
α.κανονικό εξάγωνο	1.$R\sqrt{2}$
β.ισόπλευρο τρίγωνο	2.$\frac{R\sqrt{2}}{2}$
γ.τετράγωνο	3.$R\sqrt{3}$
	4.$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
	5.R

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμενου κύκλου του κανονικού πολυγώνου.

ΘΕΜΑ 2_0

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 4 .Με διαμέτρους ΑΔ και ΒΓ γράφουμε κύκλους που εφάπτονται στο σημείο Μ , όπως φαίνεται στο σχήμα:

Να υπολογίσετε :

α.Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΒ ,όπου Κ το μέσο της ΒΓ.

β.Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΒ.

ΘΕΜΑ 3_0

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α,β,γ ισχύει $3\beta^2 + 2\gamma^2 = 2\alpha^2$.
Να αποδειχτεί ότι:

α.Ισχύει η σχέση $\mu_\alpha^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}$, όπου μ_α η διάμεσος στην πλευρά α.

β.$A > 90^0$

γ.Η προβολή ΜΔ της διαμέσου ΒΔ στην πλευρά β είναι ίση με $\frac{3}{4}\beta$.

ΘΕΜΑ 4_0

Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Έστω Ε ένα σημείο της ΑΔ ,τέτοιο ώστε ΑΔ= $\sqrt{3}$ ΑΕ και Ζ το σημείο τομής της προέκτασης της ΒΕ με τον κύκλο.

α.Να εκφράσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ ως συνάρτηση της πλευράς α του τριγώνου.

β.Να αποδείξετε ότι ΕΖ= $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ α

γ.Να βρείτε ,ως συνάρτηση του α ,το εμβαδό του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία ΔΟΖ.