

# ΛΟΓΙΚΗ - ΣΥΝΟΛΑ

---

## ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

### **Η συνεπαγωγή**

Αν  $P$  και  $Q$  είναι δύο ισχυρισμοί τέτοιοι ώστε όταν αληθεύει ο  $P$  να αληθεύει και ο  $Q$  τότε λέμε ότι το  $P$  συνεπάγεται το  $Q$  και γράφουμε  $P \Rightarrow Q$

Π.χ , όταν  $a=\beta$  τότε και  $\beta=a$   
δηλ.  $\alpha = \beta \Rightarrow \beta = \alpha$

### **Η ισοδυναμία**

Αν  $P$  και  $Q$  είναι δύο ισχυρισμοί τέτοιοι ώστε όταν αληθεύει ο  $P$  να αληθεύει και ο  $Q$  και όταν αληθεύει ο  $Q$  να αληθεύει και ο  $P$  τότε λέμε ότι ο  $P$  συνεπάγεται τον  $Q$  και αντιστρόφως και γράφουμε  $P \Leftrightarrow Q$

Π.χ  $\alpha \cdot \beta = 0$  τότε  $\alpha=0$  ή  $\beta=0$  και αν  $\alpha=0$  ή  $\beta=0$  τότε  $\alpha \cdot \beta = 0$

### **Η διάζευξη (ο σύνδεσμος «ή»)**

Αν  $P$  και  $Q$  είναι δύο ισχυρισμοί τότε ο ισχυρισμός  $P$  ή  $Q$  αληθεύει μόνο στην περίπτωση που είναι τουλάχιστον ένας από τους δύο ισχυρισμούς αληθής και γράφουμε  $P \vee Q$ .

Π.χ ο ισχυρισμός  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0$  είναι αληθής αν και μόνο αν ο ισχυρισμός  $x=1$  είναι αληθής ή ο ισχυρισμός  $x=-1$  είναι αληθής.

### **Η σύζευξη (ο σύνδεσμος «και»)**

Έστω οι προτάσεις  $P$  και  $Q$ . Λέμε ότι η πρόταση « $P$  και  $Q$ » είναι αληθής όταν οι  $P$  και  $Q$  είναι και οι δύο αληθείς ή ψευδής σε κάθε άλλη περίπτωση.

### **Άρνηση**

Έστω μια πρόταση  $P$ . Ονομάζουμε άρνηση της  $P$  μια πρόταση η οποία είναι αληθής όταν η  $P$  είναι ψευδής και ψευδής όταν η  $P$  είναι αληθής και συμβολίζεται  $P'$ .

Π.χ αν  $P$  «ο αριθμός 2 είναι μικρότερος του 5» που είναι αληθής τότε  $P'$  «ο αριθμός 2 είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 5» που είναι ψευδής.

### **Αντιθετοαντιστροφή**

Έστω ότι αν η πρόταση  $P$  είναι αληθής τότε και η πρόταση  $Q$  είναι αληθής, δηλαδή  $P \Rightarrow Q$ . Τότε αν  $Q'$  είναι αληθής τότε και η  $P'$  είναι αληθής δηλαδή  $Q' \Rightarrow P'$

# ΛΟΓΙΚΗ - ΣΥΝΟΛΑ

## Ασκήσεις

1. Ποιες από τις παρακάτω φράσεις είναι λογικές:

- A) Η Ρόδος είναι νησί.
- B) Ο αριθμός 6 είναι πρώτος
- Γ) Αύριο θα βρέξει.

2. Να διατυπώσετε τις αντίστροφες προτάσεις των προτάσεων:

- A) Αν  $a=2$  τότε  $a^2=4$
- B) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες του ίσες τότε είναι ισοσκελές.
- Γ) Αν ένα τρίγωνο είναι ισοπλευρό τότε είναι και ισοσκελές.

3. Θεωρούμε τις προτάσεις : P: “ Ο Κώστας βράχηκε”

Q: “Ο Κώστας έκανε μπάνιο”

- A) Μπορούμε να γράψουμε  $P \Rightarrow Q$ ;
- B) Μπορούμε να γράψουμε  $Q \Rightarrow P$ ;
- Γ) Μπορούμε να γράψουμε  $P \Leftrightarrow Q$ ;

4. Να συμπληρωθεί ο πίνακας με Ψ (ψευδής) ή Α(αληθής)

P	P'
A	
Ψ	

5. Να συμπληρωθεί ο πίνακας με Ψ (ψευδής) ή Α(αληθής)

P	Q	P ή Q
A	A	
A	Ψ	
Ψ	A	
Ψ	Ψ	

6. Να συμπληρωθεί ο πίνακας με Ψ (ψευδής) ή Α(αληθής)

P	Q	P και Q
A	A	
A	Ψ	
Ψ	A	
Ψ	Ψ	

7. Θεωρούμε τις προτάσεις:

P<sub>1</sub> : « Ο αριθμός 7 είναι περιττός»      P<sub>2</sub> : « ο αριθμός 8 είναι άρτιος»

P<sub>3</sub> : «Ο αριθμός 11 είναι άρτιος»      P<sub>4</sub> : « Ο αριθμός 12 είναι περιττός»

Να συμπληρωθεί ο πίνακας με Ψ (ψευδής) ή Α(αληθής)

P <sub>1</sub> και P <sub>2</sub>	P <sub>2</sub> και P <sub>3</sub>	P <sub>3</sub> και P <sub>4</sub>	P <sub>1</sub> ή P <sub>2</sub>	P <sub>2</sub> ή P <sub>3</sub>
-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

## ΛΟΓΙΚΗ - ΣΥΝΟΛΑ

--	--	--	--	--

8. Να συμπληρώσετε τα κενά με το «ή» ή το «και»

α)  $\Delta \nu \quad \alpha \cdot \beta = 0 \quad \text{τότε} \quad \alpha = 0 \dots \dots \dots \beta = 0$

β)  $\Delta \nu \quad \alpha \cdot \beta \neq 0 \quad \text{τότε} \quad \alpha \neq 0 \dots \dots \dots \beta \neq 0$

9. Να γράψετε  $\Psi$  (ψευδής) ή  $\Delta$  (αληθής)

1)  $\alpha^2 - 5 = 0 \Rightarrow \alpha = -5$

2)  $3x = 3x^2 \Leftrightarrow x = 1$

3)  $a \neq 3 \Leftrightarrow a^2 \neq 9$

4)  $a^2 < 16 \Rightarrow a < 4$

5)  $a < 4 \Rightarrow a^2 < 16$

6)  $0 < a < 2 \Rightarrow 0 < a^2 < 4$

7)  $a > \beta \Rightarrow |\alpha| > |\beta|$

8)  $\alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha, \beta$  θετικοί αριθμοί

9)  $\alpha = \beta$  και  $\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

10)  $\alpha < -2$  και  $\beta < -3 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 6$

11) Σε κάθε τρίγωνο  $\Delta \text{B}\Gamma$  ισχύει  $\Delta \text{B} = \Delta \Gamma \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$

# ΛΟΓΙΚΗ - ΣΥΝΟΛΑ

## ΣΥΝΟΛΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  και  $A = \{1, 2, 3\}$  και  $B = \{3, 4, 5\}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

- i)  $\alpha. A \subseteq B$                        $\beta. B \subseteq \Omega$                        $\gamma. B \subseteq A$                        $\delta. A \cap B = \{3\}$   
ii)  $\alpha. A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$      $\beta. A \cup B = \{3\}$                        $\gamma. A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$      $\delta. A \cup B = \{6\}$   
iii)  $\alpha. A \cap B = \{3\}$                        $\beta. A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$      $\gamma. A \cap B = \{6\}$                        $\delta. A \cap B = \emptyset$   
iv)  $\alpha. A' = \{3, 4, 5\}$                        $\beta. A' = \{4, 5, 6\}$                        $\gamma. A' = \emptyset$                        $\delta. A' = \{1, 2, 3\}$

2. Έστω  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  ένα σύνολο και τρία υποσύνολα του

$$A = \{1, 2, 5, 8, 9\} \quad B = \{3, 5, 8, 10\} \quad \Gamma = \{4, 6, 7, 8, 10\}$$

A. Να παραστήσετε τα σύνολα  $\Omega, A, B, \Gamma$  με διάγραμμα Venn.

B) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους καθώς και με διαγράμματα Venn τα σύνολα:

i)  $A \cup B$     ii)  $B \cap \Gamma$     iii)  $A \cup (B \cap \Gamma)$     iv)  $(A \cap B) \cup \Gamma$     v)  $A \cap B \cap \Gamma$

3. Av

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}, \quad A = \{x \in \Omega / x \text{ άρτιος}\}, \quad B = \{x \in \Omega / x \text{ διαιρέτης του } 8\}$$

τότε να βρείτε τα ακόλουθα σύνολα:

$$A \cup B, A \cap B, A', B', A - B, B - A$$

4. Av

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}, \quad A = \{x \in \Omega / x \text{ άρτιος}\}, \quad B = \{x \in \Omega / x \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$$

τότε να βρείτε τα ακόλουθα σύνολα:

$$A \cup B, A \cap B, A', B', A - B, B - A \text{ και να κάνετε το διάγραμμα Venn.}$$

5. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

i)  $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x \leq 6\}$     ii)  $B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \leq 3\}$     iii)  $\Gamma = \{x \in \mathbb{N} / -3 < x \leq 3\}$   
iv)  $\Delta = \{x \in \mathbb{N} / |x+1| = 2\}$     v)  $E = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| \leq -1\}$     vi)  $Z = \{x \in \mathbb{N} / (x^2 - 64)(3x+1)\}$   
vii)  $H = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 - 64)(3x+1)\}$      $\Theta = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{N} / x+2y = 3\}$

6. Να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / |x| < 5\} \quad \Delta = \{x \in \mathbb{Z} / -7 < 2x+1 < 5\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z} / |x-1| < 2\} \quad E = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 4\}$$
$$\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 9\}$$

## ΛΟΓΙΚΗ - ΣΥΝΟΛΑ

---

7. Να εξετάσετε αν  $A \subseteq B$  όπου

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 = 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{N} / |x - 2| < 1\}$$

8. Αν  $A \subseteq B$  ,  $B \subseteq \Gamma$  ,  $\Gamma \subseteq A$  να αποδείξετε ότι  $A=B=\Gamma$ .

9. Έστω  $A, B$  υποσύνολα ενός συνόλου  $\Omega$  . Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις

i)  $A \cap B \subseteq A$  και  $A \cap B \subseteq B$

ii)  $A \cup B \subseteq A$  και  $A \cup B \subseteq B$

iii)  $(A \cup B') \cup B = \Omega$

iv)  $A \subseteq B$  και  $B \subseteq A'$  τότε  $A = \emptyset$

10. Να επιλέξετε το γράμμα της σωστής απάντησης

i) Αν  $A = \{1, 2, 3\}$  ,  $B = \{3, 4\}$  τότε το σύνολο  $A \cup B$  είναι ίσο με:

$\alpha. \{1, 2, 3\}$      $\beta. \{3, 4\}$      $\gamma. \{1, 2, 3, 3, 4\}$      $\delta. \{1, 2, 3, 4\}$

ii) Η τομή των συνόλων των λύσεων των εξισώσεων  $x^2 + 1 = 0$  και  $x - 1 = 0$  είναι ίσο με :

$\alpha. \emptyset$      $\beta. \{1\}$      $\gamma. \{-1\}$      $\delta. \{0\}$

11. Έστω  $A = \{0, 1, 4, 6\}$  και  $B = \{0, 1, 6, 9\}$  ενός συνόλου  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$

Να εκφράσετε τα παρακάτω σύνολα:

i)  $A \cup B$

ii)  $A \cap B$

iii)  $A' \cup B$

iv)  $A \cap B'$

v)  $A' \cap B'$

12. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις έχουμε  $A \subseteq B$

$\alpha) A = \{-3, -2, -1, 0\}$      $B = \{x \in \mathbb{Z} / -5 < x \leq 5\}$

$\beta) A = \{3, 4, 6\}$      $B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρετός του } 12\}$

13. Να εξετάσετε αν είναι ίσα τα ακόλουθα ζεύγη συνόλων:

$\alpha. A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x + 2 \leq 1\}$     και  $B = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$

$\beta. \Gamma = \{x \in \mathbb{N} / -3 \leq x + 2 \leq 1\}$     και  $\Delta = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$

14. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει  $A=B$

$\alpha. A = \{3, 4, 5\}$      $B = \{5, 3, 4\}$

$\beta. A = \{x \in \mathbb{R} / x - 4 = 0\}$     και  $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 16 = 0\}$

**15.** Να προσδιοριστεί ο  $\alpha$ , ώστε να είναι ίσα τα σύνολα:

$$A = \{1, \alpha^2\}, \quad B = \{\alpha, 1\}$$

**16.** Να γράψετε όλα τα υποσύνολα του συνόλου  $\Omega = \{3, 4, 5\}$

**17.** Ποιο από τα παρακάτω σύνολα είναι  $\emptyset$

$$\alpha. A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 3 \text{ και } 2x = 8\}$$

$$\beta. B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 3 \text{ ή } 2x = 8\}$$

$$\gamma. \Gamma = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{3-5x}{3} = \frac{x-1}{2} - \frac{13x}{6} \right\}$$

$$\delta. \Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 5 = 5 \left( \frac{x}{6} + 1 \right) \right\}$$

**18.** Για ποιες τιμές των  $\alpha, \beta$  ισχύει  $A=B$

$$A = \{2, \alpha, 7\} \quad B = \{2, 6, \beta\}$$

$$A = \{2, \alpha - 1, 3\} \quad B = \{2, \beta - 8, 4\}$$

**19.** Αν  $\Omega = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{2, 5\}$ ,  $B = \{2, 4\}$  να αποδείξετε ότι :

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{και} \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

**20.** Να βρεθεί η ένωση και η τομή των συνόλων

$$\alpha. A = \mathbb{R} - \{1, 2\} \quad B = \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

$$\beta. A = \mathbb{R} - \{1, 2\} \quad B = [1, +\infty)$$

$$\gamma. A = (3, +\infty) \quad B = (-\infty, 5]$$

**21.** Δίνονται τα σύνολα  $A = \{0, 1, 3, 5\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $\Gamma = \{-2, -1, 2, 3\}$

A. Να σημειώσετε Αληθής ή Ψευδής

i)  $1 \in A$

iv)  $(-2)(-1) \in \Gamma$

ii)  $0 \notin \Gamma$

v)  $3 \cdot 5 \in A$

iii)  $2, 4 \in B$

vi)  $\frac{8}{4} \in B$

## ΛΟΓΙΚΗ - ΣΥΝΟΛΑ

---

Β. Συμπλήρωσε με  $\in$  ή  $\notin$  τις επόμενες προτάσεις ώστε να γίνουν αληθείς.

i)  $-2 \dots \Gamma$

ii)  $5 \dots B$

iii)  $\frac{1}{2} + \frac{7}{2} \dots B$

iv)  $(-1) \cdot 2 \dots \Gamma$

v)  $246 \dots B$

v)  $3+5 \dots A$

**22.** Δίνονται το σύνολο  $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ . Σημειώστε Αληθής ή Ψευδής

i)  $9 \subset A$

ii)  $12 \in A$

iii)  $\{6\} \notin A$

iv)  $\{3, 6\} \subset A$

v)  $\{12\} \subset A$

vi)  $\{369\} \subset A$

vii)  $\{x / x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 15\} \subset A$

viii)  $\{x / x \in \mathbb{N}, x = 3n, n = 1, 2, 3, 4, 5\} \subset A$

**23.** Δίνεται το σύνολο:  $A = \{0, 1\}$ . Σημειώστε Αληθής ή Ψευδής

i)  $\emptyset \subset A$

ii)  $\emptyset \subseteq \emptyset$

iii)  $0 \in \emptyset$

iv)  $\{0\} = \emptyset$

v)  $\{0\} \subset A$

vi)  $\{1\}$  είναι ένα υποσύνολο του A

vii)  $\{0, 1\}$  είναι ένα υποσύνολο του A

viii)  $\emptyset \subset \{1\}$

**24.** Δίνονται τα σύνολα:  $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$  και  $B = \{\beta, \delta, \zeta\}$ . Σημειώστε Αληθής ή Ψευδής

i)  $B \in A$

ii)  $B \subset A$

iii)  $B \cap A = B$

iv)  $B \cup A = B$

## ΛΟΓΙΚΗ - ΣΥΝΟΛΑ

---

**25.** Δίνονται τα σύνολα :

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{3, 4, 5, 6\} \quad \Gamma = \{3, 4\} \quad \Delta = \{1, 2\} \quad E = \{5, 6\} \quad \text{και}$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \text{το βασικό σύνολο.}$$

Περιγράψτε καθένα από τα επόμενα σύνολα αναγράφοντας τα στοιχεία τους

i)  $(B \cup E) - A$

ii)  $\Gamma \cap B$

iii)  $(\Gamma \cap \Delta) - A$

**26.** Ο κ. Μαθηματίδης έχει 16 μαθητές στην Άλγεβρα, 20 στην Γεωμετρία, 12 στην Ιστορία. Έξη από αυτούς κάνουν και Άλγεβρα και Γεωμετρία, 4 κάνουν και γεωμετρία και Ιστορία, 5 κάνουν και τα 3 μαθήματα. Υποθέτοντας ότι καθένας από τους μαθητές κάνει τουλάχιστον ένα από τα τρία μαθήματα να βρείτε τον αριθμό των μαθητών του κ. Μαθηματίδη.

**27.** Υπάρχουν 29 άτομα σε ένα δωμάτιο. Από αυτούς, 11 μιλάνε Γαλλικά, 24 μιλάνε Αγγλικά και 3 δεν μιλάνε ούτε Γαλλικά ούτε Αγγλικά. Πόσα άτομα σε αυτό το δωμάτιο μιλάνε και Γαλλικά και Αγγλικά;

**28.** Σε ένα χωριό, το ένα τρίτο των παιδιών μπορεί να κολυμπήσει, δυο τρίτα των παιδιών μπορεί να κάνει ποδήλατο και το ένα εβδομο μπορεί και να κολυμπήσει και να κάνει ποδήλατο. Γνωρίζοντας ότι υπάρχουν λιγότερα από 40 παιδιά στο χωριό να βρείτε το πλήθος των παιδιών που δεν μπορούν ούτε να κολυμπήσουν ούτε να κάνουν ποδήλατο.