

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Μονάδες 9**

- B.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ;

**Μονάδες 6**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Αν  $z$  είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο  $n$  ισχύει  $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

**Μονάδες 2**

- β.** Η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  το πολύ σε ένα σημείο.

**Μονάδες 2**

γ. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

**Μονάδες 2**

δ. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\phi x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$  και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

**Μονάδες 2**

ε. Για κάθε συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , ισχύει

$$\int f'(x) dx = f(x) + c, \quad x \in \Delta$$

όπου  $c$  είναι μια πραγματική σταθερά.

**Μονάδες 2**

### **ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)z + (2+i)\bar{z} - 8 = 0$$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z = x+yi$  οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

**Μονάδες 10**

- β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό  $z_1$  και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό  $z_2$  οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

**Μονάδες 8**

- γ. Για τους αριθμούς  $z_1, z_2$  που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2+x+1] - \ln(x+2), \quad x > -1$$

όπου  $\lambda$  ένας πραγματικός αριθμός με  $\lambda \geq -1$

- A. Να προσδιορίσετε την τιμή του  $\lambda$ , ώστε να υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και να είναι πραγματικός αριθμός.

**Μονάδες 5**

- B. Έστω ότι  $\lambda = -1$

- α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 10**

- β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 6**

- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) + \alpha^2 = 0$  έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$  με  $\alpha \neq 0$

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται μια συνάρτηση  $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = k x e^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$f'(0) = 2f(0), \quad f'(2) = 2f(2) + 12e^4, \quad f(1) = e^2$$

όπου  $k$  ένας πραγματικός αριθμός.

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα  $[0,2]$ .

**Μονάδες 4**

**β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0,2)$  τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$$

**Μονάδες 6**

**γ.** Να αποδείξετε ότι  $k = 6$  και ότι ισχύει  $g(x) = 0$  για κάθε  $x \in [0,2]$ .

**Μονάδες 6**

**δ.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x^3 e^{2x}$ ,  $0 \leq x \leq 2$

**Μονάδες 5**

**ε.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$$

**Μονάδες 4**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα. Να μη χρησιμοποιηθεί το μιλιμετρέ φύλλο του τετραδίου.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**