

## ΠΡΑΞΕΙΣ - ΔΙΑΤΑΞΗ

1. Να γίνουν οι πράξεις:

$$i) 2[-2x + x(3 - y) + 2y] - 4[2y(x + 1) - x(y - 1)]$$

$$ii) 3[2x(2 - 3y) - 3x(2 - y)] - 2[y(x - 3) - 2x(3y - 2)]$$

$$iii) 2[-2x + x(3 - y) + 2y - 2y(x + 1) - x(y - 1)]$$

2. Να δειχθεί ότι η τιμή της παράστασης  $A = \frac{(x^2 - 10x + 25)^3 (x + 5)^3}{(5 - x)^3 (25 - x^2)^3}$  είναι

ανεξάρτητη της μεταβλητής  $x$  ( $x \neq 5, -5$ )

3. Αν  $\frac{x}{y} = 3$ , να βρεθούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων

$$i) \frac{5x - 3y}{4x + 7y} \quad ii) \frac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}$$

4. Να δείξετε ότι:  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4$ ,  $x \neq 0$ .

5. α) Να απλοποιηθεί η παράσταση:  $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2$

β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:  $\left(\frac{2017}{2018} + \frac{2018}{2017}\right)^2 - \left(\frac{2017}{2018} - \frac{2018}{2017}\right)^2$ .

6. Να γίνουν οι πράξεις :

$$\alpha) 3(\alpha - \beta) - 2(\alpha + \beta) + 3(2\alpha + \beta) - 2(\alpha - 2\beta)$$

$$\beta) -6 - 6[4 - 5[-3 - 4[2 - 3(x + 1)]]]$$

7. Αν οι αριθμοί  $\mu, \nu$  είναι αντίθετοι και ισχύει:  $2\mu + 3\nu - \kappa - (\lambda - 1) = 1 - \mu$  να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί  $\kappa, \lambda$  είναι αντίθετοι.

8. Να δείξετε ότι οι αριθμοί  $x = \alpha + 2\beta - (3\gamma + \delta)$  και  $y = -(\alpha + 2\beta) + 3\gamma + \delta$  είναι αντίθετοι.

9. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$i) \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$ii) \frac{(x^2 - x) + 2x - 2}{x^2 - 1}$$

$$iii) \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - x}$$

$$iv) \frac{x(x - 2) + 1}{(x - 2)(x - 1)}$$

## ΠΡΑΞΕΙΣ - ΔΙΑΤΑΞΗ

10. Αν  $\alpha + \beta = 3$  και  $\alpha \cdot \beta = 2$  να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$i) \alpha^2 + \beta^2 \quad ii) \alpha^3 + \beta^3 \quad iii) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \quad iv) \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$$

11. Αν  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$  να δείξετε ότι:  $\frac{\alpha\beta}{\gamma^2} + \frac{\beta\gamma}{\alpha^2} + \frac{\gamma\alpha}{\beta^2} = 3$

12. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} \quad \text{και} \quad 3\alpha + 2\beta - \gamma = 16$$

13. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{(x-2)^2}{(3-y)^2} : \frac{2x-x^2}{9-y^2}$$

$$B = \left( \frac{x^2 + xy}{xy^2 - y^3} \right)^4 \cdot \left( \frac{y-x}{x^2 + 2xy + y^2} \right)^3$$

$$\Gamma = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} : \frac{xy}{x-y}$$

$$\Delta = \frac{4x^2 + 4x + 1}{6x^2 - 3x} : \frac{12x^2 - 3}{2x} \quad E = (x+y)^2 \cdot (x^{-1} + y^{-1})^{-2}$$

14. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) 2x^3(3x^2 - 1)^2 - 6x^5(3x^2 - 2) + x(x-1)^2$$

$$\beta) 2x(3x-2)^2 - x^2(x-3) - x(2x-1)^2$$

$$\gamma) (4x-1)^3 - (-4x+3)^2 + (2-x)(x+2) - 4$$

15. Αν  $\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha - 6\beta - 8 = 0$ , δείξτε ότι:  $\beta = -\alpha - 2$  ή  $\beta = \alpha - 4$

16. Αν  $x^2 - a^2 - 2xy + y^2 = 0$ , δείξτε ότι:  $y = x - a$  ή  $y = x + a$

17. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \left( \frac{1+(-2)^2}{2} - \frac{1^{-1}-(-2)^2}{4} \right) : \frac{1^3-(-2)^2+1}{1 \cdot (-2)}$$

$$\beta) (-16)^{80} \cdot (-0,5)^{20}$$

$$\gamma) (-4)^{60} \cdot (-0,125)^{40}$$

$$\delta) (1,5)^{20} \cdot 27^6 \cdot (-8)^6 + 12^{100} \cdot 1,5^{50} \cdot 6^{-149}$$

18. Αν  $\alpha, \beta$  αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι:

$$\left[ (\alpha^{-7} \cdot \beta^3) : (\alpha\beta)^4 \right] \cdot \frac{(\alpha\beta)^{-2}}{(\alpha^{18})^0 \cdot (\beta^{-2} \cdot \alpha)^{-1} \cdot \beta^7} = 1$$

19. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\alpha^{-12} \cdot \beta^4 \cdot (\alpha^2 \beta^{-5})^3}{\alpha^{-5} (\alpha^{-3} \cdot \beta^5)^{-2}} \cdot \left[ \frac{(\alpha\beta)^2}{\alpha^2 \beta^4} \right]^3 \quad \text{για } \alpha=2017 \text{ και } \beta=\frac{1}{2017}$$

20. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{25^5 \cdot 15^{10} \cdot 12^{15} \cdot 14^{20}}{6^{25} \cdot 32^5 \cdot 35^{20}}$$

## ΔΙΑΤΑΞΗ

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha^2 + 9 \geq 6\alpha \quad \beta) \alpha^2 + 16 \geq -8\alpha \quad \gamma) (x+y)^2 + 4xy \geq -8y^2$$

$$\delta) 2\alpha^2 + 3\alpha + 8 > 0 \quad \epsilon) \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 2\beta + 5 > 0$$

$$\sigma\tau) x^2 - 6\alpha + 10 > 0 \quad \zeta) \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 2\beta + 2 \geq 0$$

2. Α) Αν  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$  δείξτε ότι:  $\alpha = \beta = 0$

Β) Αν  $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 0$  να βρείτε τα  $x, y, z$ .

3. Αν  $\alpha + \beta = 4$  να δείχθει ότι:  $\alpha \cdot \beta \leq 4$  και  $\alpha^2 + \beta^2 \geq 8$

4. Αν  $\alpha > -2$  να δείξετε ότι:  $4 + 2\alpha > 2 + \alpha$

## ΠΡΑΞΕΙΣ - ΔΙΑΤΑΞΗ

---

5. Αν  $\alpha > \beta > 0$  να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \quad \text{και} \quad B = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

6. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι θετικοί πραγματικοί, να δείξετε ότι:

$$(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \geq 9$$

7. Α. Αν  $\alpha, \beta$  ομόσημοι να αποδείξετε ότι :  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$

Β. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  ομόσημοι, να αποδείξετε ότι :  
 $\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha) \geq 6\alpha\beta\gamma$

8. Να βρείτε τις τιμές των  $x, y$  για τις οποίες ισχύει :

$$5x^2 + 4x + y^2 - 2xy + 1 = 0$$

9. Αν  $6 < x < 8$  και  $2 < y < 3$ , να αποδείξετε ότι

$$\text{i) } 8 < x + y < 11 \quad \text{ii) } 3 < x - y < 6 \quad \text{iii) } 18 < 2x + 3y < 25 \quad \text{iv) } 1 < \frac{x-2}{y+1} < 2$$

10. α) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης  $A = 2x^2 + y^2 - 2x - 4xy + 7$

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης  $A$  και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τις τιμές των  $x$  και  $y$  για τις οποίες συμβαίνει το ελάχιστο.