ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & x \\ 0 & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$$

2.Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\begin{vmatrix} y & 3 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2y-1 & y+2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

3. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 3x-1 & 3 \\ x+2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & x+1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$|3x+2y-12|+|4x-3y+1|=0 \qquad |2x+3y-2|+|x+2y+3|=0$$

5.Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x+4y=33 \\ 5x+2y=41 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x+8y=-61 \\ -3x+4y=-11 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+4y=-7 \\ 9x+y=109 \end{cases}$$

6. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} 2(x+1)-3y=3 \\ x-2(y-2)=3x+6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1-3(y-x) \\ y=2x+3(y-x) \end{cases}$$

7. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=3 \\ x-4y=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y+1}{8}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{y}{2}=\dfrac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x-3}{y+2}=-\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{y+1}{x+5}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

8. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+3)^2+(y-8)^2}{x^2+y^2+39}=1 \\ \dfrac{2x+3y+8}{5x+4y-1}=\dfrac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+15}=\dfrac{y-6}{y+2} \\ \dfrac{x-3}{x}=\dfrac{y-4}{y-1} \end{cases}$$

9.Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x+y}{5}=\dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{y+2}{2} \end{cases}$$

10. Να λυθούν τα παραμετρικά συστήματα:

$$\begin{cases} mx+4y=2 \\ x+my=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (m-1)x+8y=4 \\ x+(m+1)y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (m+1)x+8y=4m \\ mx+(m+3)y=3m-1 \end{cases}$$

11. Να λυθούν τα παραμετρικά συστήματα:

$$\begin{cases} mx+y=2 \\ x+y=2m \end{cases} \qquad \begin{cases} mx-2y=m \\ (m-1)x-y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+(3m-1)y=0 \\ x+2y=m-4 \end{cases}$$

12. Να λυθούν τα παραμετρικά συστήματα

$$\begin{cases} \lambda^2 x-\lambda y=2 \\ \lambda x-\lambda y=2\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x+(\lambda+1)y=0 \\ 2\lambda x+8y=0 \end{cases}$$

13.Να λυθεί το παραμετρικό σύστημα:

$$\begin{cases} mx+(m+1)y=3m+2 \\ 2x+(2m-1)y=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} (m+2)x+(m-7)y=7 \\ 4x-5y=m+8 \end{cases}$$

14. Να βρείτε τις τιμές των λ,μ για τις οποίες τα συστήματα:

$$(\Sigma_1)\begin{cases}(2\lambda-1)x+10\mu y=3\\2x+4y=5\end{cases}\qquad(\Sigma_2)\begin{cases}(\lambda-1)x-(m-1)y=7\\3x-6y=5\end{cases}$$

είναι συγχρόνως αδύνατα.

15. Να βρεθούν τα α, β ώστε τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\begin{cases}(\alpha-1)x-\beta y=2\\ax+y=0\end{cases}\qquad(\Sigma_2)\begin{cases}x+3y=1\\-x+ay=2\end{cases}$$

να είναι συγχρόνως αδύνατα.

16. Δίνονται τα

$$\Sigma_1\begin{cases}(\alpha+1)x-\beta y=1\\x+y=-1\end{cases}\qquad\Sigma_2\begin{cases}x+(\beta+2)y=a^2+1\\x-(a-1)y=\beta^2\end{cases}$$

Να δείξετε ότι αν το πρώτο σύστημα έχει άπειρες λύσεις τότε το δεύτερο είναι αδύνατο.

17.Δίνονται τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\begin{cases}(\alpha+1)x-\beta y=1\\x+y=-1\end{cases}\qquad(\Sigma_2)\begin{cases}x+(\beta+2)y=a^2+1\\x-(a-1)y=\beta^3\end{cases}$$

Να δείξετε ότι αν το Σ_1 έχει άπειρες λύσεις , το Σ_2 είναι αδύνατο

18.Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}2x+y=\lambda+2\\3x-2y+\lambda=5\end{cases}$

Α.Να δείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

Β.Να υπολογίσετε τα x,y

Γ. Για ποια τιμή του λ η λύση (x,y) που βρήκατε επαληθεύει τη σχέση x+y=5.

19.Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x,y ισχύει:

$$D_x + D_y = 9D$$
$$D_x - D_y = 5D$$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση , να βρείτε τη λύση αυτή.

20.Αν σε σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x,y ισχύει

$$2D_x + 3D_y = -D$$
$$-4D_x + 7D_y = -11D$$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση , να βρεθεί η λύση αυτή.

21. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 ισχύει

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D - 6D_x + 4D_y - 14$$

Να λυθεί το σύστημα αυτό.

22.Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y και

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 \le D \cdot D_x + D \cdot D_y + D_x \cdot D_y \quad \text{με} \quad \left(\mathrm{D}, \mathrm{D_x}, D_y\right) \ne (0,0,0)$$

Να δειχτεί ότι η λύση του (Σ) είναι το ζεύγος (x,y)=(1,1)

23.Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y το οποίο έχει μοναδική λύση και ισχύει

$$\begin{vmatrix} D_x & \mathrm{D} \\ \mathrm{D} & \mathrm{D_y} \end{vmatrix} = 0 \quad , \begin{vmatrix} \mathrm{D_x} & -1 \\ \mathrm{D_y} & 1 \end{vmatrix} = 2D$$

Να βρεθεί η λύση του συστήματος.

24. Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y το οποίο έχει μοναδική λύση και ισχύει $D_x^2 + D_y^2 + 5D^2 \le 2D \cdot \left(D_x + 2D_y\right)$

Να βρεθεί η λύση του συστήματος.

25.Σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y ισχύει:

$D_x^2 + D_y^2 - 2DD_x - 4DD_y + 5D^2 = 0$ και $\mathrm{D} \ne 0$. Να βρείτε τα x,y

26.Σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y ισχύει:

$D_x + D_y = 5D$ και $2\mathrm{D_x} - D_y = D$ και $\mathrm{D} \ne 0$. Να βρείτε τα x,y

27. Σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y ισχύει:

$D_x^2 + D_y^2 - 2D^2 = 2DD_y - 2DD_x$ και $D \neq 0$. Να βρείτε τα x,y

28. Σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y ισχύει: $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$.Να δείξετε ότι:

$\alpha)(D-2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0$

β)Να βρεθούν τα x,y

29.Θεωρούμε το σύστημα $\begin{array}{l} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{array}$

για το οποίο ισχύει $D = D_x + D_y$

Να δείξετε ότι :

α)Αν το σύστημα είναι ομογενές , τότε έχει και μη μηδενικές λύσεις

β)Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) τότε

$\alpha) x_0 + y_0 = 1$ β)$x_0^2 - y_0^2 = \dfrac{D_x - D_y}{D}$

γ)Αν επιπλέον ισχύει $x_0^2 - y_0^2 = 3$, να βρείτε τη λύση του συστήματος και στη συνέχεια να δείξετε ότι $D_x + 2D_y = 0$

<u>ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ</u>

1.Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$\begin{cases} 3\sqrt{x} - 6\sqrt{y} = 7 \\ 2\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 3 \\ 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = -11 \end{cases}$

2.Να λυθούν τα συστήματα

$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 2 \\ 8x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases}$ $\begin{cases} 4|x| - 2|y| = 11 \\ 6|x| - 5|y| = 15,5 \end{cases}$

3. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{7}{12} \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=\frac{5}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{-3}{x-7}+\frac{5}{y+3}=7 \\ \frac{5}{x-7}-\frac{4}{y+3}=-3 \end{cases}$$

4. Να λυθούν τα συστήματα

$$\begin{cases} 8x^2-y^2=16 \\ y=2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2xy+y^2=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$$

5. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x-2y=-3z \\ 3x+8y=14-9z \\ 2x+3y+5z=7 \end{cases}$$

6. Να λυθεί το σύστημα:

$$5x+5y-z=0$$

$$10x+5y+2z=0$$

$$-5x+15y-9z=0$$

7. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4} \\ 2x-y+2z=18 \end{cases}$$

8. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9 \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=3 \end{cases}$$

9. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2+y^2+3x-2y=1 \\ x^2+y^2+2x-y=1 \end{cases}$$

10.Δίνεται η ευθεία $y=\lambda x$ και ο κύκλος $x^2+y^2-4x+1=0$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία
α)να μην έχει κοινά σημεία με τον κυκλο
β)να εφάπτεται του κύκλου
γ)να τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία

11.Δίνεται η ευθεία $y=\lambda x-1$ και η παραβολή $y=2x^2$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία
α)να μην έχει κοινά σημεία με την παραβολή
β)να τέμνει την παραβολή σε ένα σημείο
γ)να τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.

30.Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} \lambda x+2y=4 \\ 2x+\lambda y=\lambda^2 \end{cases}$$

α.Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$
β.Αν το σύστημα είναι αδύνατο, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $x+y=-2\lambda$ και της υπερβολής $y=\frac{3}{x}$
γ.Αν το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων , να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x-y+z=\lambda-2 \\ \lambda x+y-z=0 \\ x-\lambda y+z=0 \end{cases}$$