

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: Η αντιστοιχία $f : A \rightarrow B$ λέγεται συνάρτηση αν για κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται **ένα μόνο** $y \in B$

$f : A \rightarrow B$ συνάρτηση $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
ή ισοδύναμα

$f : A \rightarrow B$ συνάρτηση $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

Το σύνολο A λέγεται σύνολο αφετηρίας ή σύνολο ορισμού ή πεδίο ορισμού της συνάρτησης, ενώ το σύνολο B λέγεται σύνολο άφιξης.

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

Ορισμός: Με τον όρο πεδίο ορισμού εννοούμε το "ευρύτερο" υποσύνολο του \mathfrak{R} στο οποίο η $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Ο συμβολισμός για το πεδίο ορισμού είναι:

i) $D(f)$ (D το αρχικό γράμμα της λέξης Domain)

ii) D_f

iii) Με κεφαλαίο γράμμα A, B, Γ κλπ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΔΙΩΝ ΟΡΙΣΜΟΥ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Όνομα	Τύπος	Πεδιο Ορισμού
Πολυωνυμική	$F(x)=a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$	\mathbb{R}
Ομοπαραλληλική	$F(x)=\alpha x + \beta$	\mathbb{R}
Σταθερή	$F(x)=c$	\mathbb{R}
Ταυτοτική	$F(x)=x$	\mathbb{R}
Ρητή	$F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}, P(x), Q(x)$ πολυωνικές συναρτήσεις του x	$\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$
Ομογραφική	$F(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ $\alpha \neq 0$ και $\frac{\alpha}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\delta}$	$\mathbb{R} - \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\}$
Άρρητη	$F(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$
Λογαριθμική	$F(x) = \log_{\alpha} h(x), \alpha > 0, \alpha \neq 1$	$\{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\}$
Τριγωνομετρικές	$F(x) = \eta \mu x$ $F(x) = \sigma \nu x$ $F(x) = \epsilon \phi x$ $F(x) = \sigma \phi x$	\mathbb{R} \mathbb{R} $\mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{R} - \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x)$ και $g(x)$ και πεδία ορισμού $A=D(f)$ και $B=D(g)$ αντίστοιχα. Τότε:

- Το άθροισμα των συναρτήσεων f και g είναι η συνάρτηση $f+g$ (εφ'όσον ορίζεται) με
 - ❖ Πεδίο ορισμού : $D(f + g) = D(f) \cap D(g) = A \cap B$
 - ❖ Τύπο : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in A \cap B$

Για να ορίζεται πρέπει $A \cap B \neq \emptyset$

- Η διαφορά των συναρτήσεων f και g είναι η συνάρτηση $f-g$ (εφ'όσον ορίζεται) με
 - ❖ Πεδίο ορισμού : $D(f - g) = D(f) \cap D(g) = A \cap B$
 - ❖ Τύπο: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in A \cap B$

Για να ορίζεται πρέπει $A \cap B \neq \emptyset$

- Το γινόμενο των συναρτήσεων f και g είναι η συνάρτηση fg (εφ'όσον ορίζεται) με
 - ❖ Πεδίο ορισμού : $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = A \cap B$
 - ❖ Τύπο: $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\forall x \in A \cap B$
- Για να ορίζεται πρέπει $A \cap B \neq \emptyset$

- Το πηλίκο των συναρτήσεων f και g είναι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ (εφ'όσον ορίζεται) με

$$\text{❖ Πεδίο ορισμού } D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D'(g) = A \cap B'$$

$$\text{όπου } B' = \{x \in B : g(x) \neq 0\}$$

$$\text{❖ Τύπο: } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in A \cap B'$$

Για να ορίζεται πρέπει $A \cap B' \neq \emptyset$

ΓΡΑΦΗΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός: Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$. Ονομάζουμε γράφημα ή γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σ'ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

Συμβολίζεται με το C_f .

$$C_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, x \in A\}$$

$$C_f = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = f(x)\}$$

ΆΡΤΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)$ και πεδίο ορισμού το $A=D(f)$. Τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **άρτια**, αν και μόνο αν,

- $\forall x \in D(f), -x \in D(f)$ (δηλαδή το $D(f)$ είναι "συμμετρικό" ως προς το 0)
- $f(-x)=f(x) \quad \forall x \in D(f)$

Μεθοδολογία:

1. Βρίσκουμε το $D(f)$
2. Εξετάζουμε αν το $D(f)$ είναι "συμμετρικό" σύνολο ως προς 0 (1)
Αν δεν ισχύει η (1) τότε η συνάρτηση δεν είναι άρτια
Αν ισχύει η (1) τότε εξετάζουμε αν
3. $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x \in D(f)$

Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια γεωμετρικά σημαίνει ότι το γράφημα της f είναι καμπύλη συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)$ και πεδίο ορισμού το $A=D(f)$. Τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **περιττή**, αν και μόνο αν:

- $\forall x \in D(f), -x \in D(f)$ (δηλαδή το $D(f)$ είναι ''συμμετρικό'' σύνολο ως προς το 0)
- $f(-x)=-f(x) \quad \forall x \in D(f)$

Μεθοδολογία:

1. Βρίσκουμε το $D(f)$
2. Εξετάζουμε αν το $D(f)$ είναι ''συμμετρικό'' ως προς 0 . (1)
Αν δεν ισχύει η (1) τότε η συνάρτηση δεν είναι περιττή
Αν ισχύει η (1) τότε συνεχίζουμε και εξετάζουμε αν:
3. $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x \in D(f)$

Γεωμετρική ερμηνεία: Αν η f είναι περιττή γεωμετρικά σημαίνει ότι το γράφημα της f είναι καμπύλη συμμετρική ως προς κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Θεώρημα: Το γινόμενο δύο άρτιων ή δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση, ενώ το γινόμενο μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Ορισμός: Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ λέγεται γνησίως αύξουσα στο A όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Ορισμός: Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ λέγεται γνησίως φθίνουσα στο A όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Ορισμός: Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ λέγεται αύξουσα στο A όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$

Ορισμός: Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ λέγεται φθίνουσα στο A όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$