

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \text{i)} f(x) &= \frac{1}{x^2 - x} & \text{ii)} f(x) &= \frac{1}{x^3 - x} & \text{iii)} f(x) &= \frac{x+4}{x-5} \\ \text{iv)} f(x) &= \frac{2x}{x^2 - 3x} & \text{v)} f(x) &= 2x + \frac{3}{x^2 + 5} & \text{vi)} f(x) &= \frac{3}{x^3 - 4x} \\ \text{vii)} f(x) &= \frac{2x}{x^2 - 2x} & \text{viii)} f(x) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \text{i)} f(x) &= \sqrt{x^2 - 4} & \text{ii)} f(x) &= \sqrt{9 - x^2} & \text{iii)} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{3x-6}} \\ \text{iv)} f(x) &= \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} & \text{v)} f(x) &= \frac{1}{x-2} + \sqrt{x-1} \\ \text{vi)} f(x) &= \sqrt{-x} & \text{vii)} f(x) &= \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}} & \text{viii)} f(x) &= \sqrt{x^2 - 4} - \frac{1}{x-1} \\ \text{ix)} f(x) &= \frac{2}{|x-3|-2} & \text{x)} f(x) &= \sqrt{3-|x|} & \text{xi)} f(x) &= \frac{3}{\sqrt{2-|x|}} \\ \text{xii)} f(x) &= \sqrt{x^2 + 2|x| + 8} & \text{xiii)} f(x) &= \frac{1}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i)} f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \quad \text{ii)} f(x) = \frac{x-2}{\sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - 4}}}$$

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ δίνει τιμή 2

3. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , \text{αν } x < 0 \\ 3 - x & , \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ να βρείτε τα $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$

4. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{αν } |x| < 1 \\ \frac{1}{x^2} & , \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$ να βρείτε τα $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$.

5. Αν $f(x) = \begin{cases} 3 & , \text{αν } x \in \mathbb{Z} \\ 2 & , \text{αν } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ να βρείτε τα $f(-2), f\left(-\frac{1}{3}\right)$,

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & , -2 < x < 0 \\ ax^3 + \beta & , 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ii) Να βρείτε τα α, β ώστε $f(-1)=2$ και $f(1)=3$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax + \beta & , x \leq 1 \\ \frac{2a - \beta}{x - 1} & , x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε τα α, β ώστε $f(0)=f(2)=4$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 6x - 3$. Να λύσετε

A) την ανίσωση : $f(|x|) \geq 9$

B) Να λύσετε την εξίσωση : $f(2|x-1|-2) = 0$

9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{1}{|x|+x}$ ii) $f(x) = \frac{\sqrt{3-|x|}}{|x+1|-2}$ iii) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{|3-x|}}$

iv) $f(x) = \frac{\sqrt{3-|x|}}{4x}$ v) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$ vi) $f(x) = \frac{4x}{|x|+1}$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $f(\alpha + \beta) - f(\alpha) - f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

11. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

A) $f(0) = 0$

B) $f(x) + f(-x) = 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

12. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

A) $f(1) = 0$

B) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ για κάθε $x \neq 0$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x$. Να λύσετε

A) την εξίσωση $f(x) = 0$

B) την εξίσωση $f(x-1) - f(x) = 1$

Γ) την ανίσωση $f(2x) - 8f(x) < x^2$

14. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(-4, -3)$ ως προς

A) τον άξονα $x'x$

B) τον άξονα $y'y$

Γ) την αρχή των αξόνων

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- 15.** Τα σημεία $A(\alpha^2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha)$ και $B(\alpha + 6, \alpha^2 - \alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$
- A) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$
- B) Να βρείτε το συμμετρικό του A ως προς
- τον άξονα $y'y$
 - την αρχή των αξόνων
 - την διχοτόμο της $1^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ γωνίας.
- 16.** Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:
- A(1,3) B(4,7)
 - A(-2,1) B(3,-1)
 - A(1,5) B(1,8)
 - A(3,6) B(-2,6)
- 17.** Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(-1,6)$, $\Gamma(3,3)$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$
- 18.** Τα σημεία $A(-3,3)$ και $B(2,\lambda)$ απέχουν απόσταση $(AB)=5$. Να βρείτε:
- τον αριθμό λ
 - σημείο Γ του αρνητικού ημιάξονα Ox' , ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ.
 - την περίμετρο του τριγώνου ABΓ.
- 19.** Να βρεθεί ο αριθμός $x \in \mathbb{R}$ ώστε η απόσταση των σημείων $A(1,2)$ και $B(x,x)$ να είναι $\sqrt{5}$.
- 20.** Να βρεθεί ο αριθμός $x \in \mathbb{R}$, ώστε η απόσταση των σημείων $A(3,-2)$ και $B(5,x)$ να είναι $\sqrt{20}$.
- 21.** Αν τα σημεία $A(5,3x+2)$ και $B(-5,10-x)$ είναι συμμετρικά ως προς τον $y'y$ να βρείτε το x .
- 22.** Τα σημεία $A(\lambda^2 - 5, |\mu + 1|)$ και $B(14 - 6\lambda, -|5 - \mu|)$ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Να βρείτε:
- τους αριθμούς λ και μ
 - την απόσταση (AB)
 - σημείο του αρνητικού ημιάξονα Oy' , ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα AB.
- 23.** Αν το σημείο $A(3,5)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να βρεθεί ο αριθμός $a \in \mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- $f(x) = x^2 + a$
 - $f(x) = \sqrt{x+a} + 3$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

24. Σε κάθε περίπτωση να βρείτε το κ ώστε το σημείο A να ανήκει στην αντίστοιχη συνάρτηση:

i) $f(x) = x + 2\kappa$ A(1,-2)

ii) $f(x) = x^2 - \kappa$ A(2,0)

iii) $f(x) = 3\kappa - \kappa(x-1)$ A(1,9)

iv) $f(x) = \frac{1}{x} + \kappa$ A(-2,-1)

v) $f(x) = \frac{2}{x-1} - \kappa x$ A(2,0)

vi) $f(x) = \kappa x^2$ A(-2,8)

25. Έστω η $f(x) = ax^3 - (a+1)x^2 - \beta x - 2$. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία A(1,-2) και B(-1,3) να βρείτε τα α, β και την f .

26. Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες:

i) $f(x) = 3x + 2$ ii) $f(x) = x^2 - 4$ iii) $f(x) = 3x^2 - 6x$

iv) $f(x) = x^2 + 1$ v) $f(x) = x^3 + 1$ vi) $f(x) = \sqrt{x}$

vii) $f(x) = 1 - x^2$ viii) $f(x) = x\sqrt{x-1}$ ix) $f(x) = |x-2|\sqrt{x+2}$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4$

i) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f τέμνει τους άξονες

ii) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$.

28. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x$ και $g(x) = 2x - 2$

i) Να βρείτε τα σημεία τομής των δύο συναρτήσεων

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f βρίσκεται κάτω από την g .

29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x - 1$ και $g(x) = 2x - 7$. Να βρείτε :

A) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g

B) Τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται :

A) πάνω από την C_g β) κάτω από την C_g

30. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$f(x) = x^4 + 3$ και $g(x) = -\sqrt{2x+4}$ δεν έχουν κοινά σημεία.

31. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες

$y = 3x + 1$ και $y = 3x - 2$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

32. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες

$$y = 3x - 1 \quad \text{και} \quad y = -\frac{1}{3}x + 2$$

33. Να βρείτε το λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες:

$$i) y = (\lambda - 1)x - 2 \quad y = 6x + 1$$

$$ii) y = (\lambda^2 + 5)x - 4 \quad y = (5\lambda - 1)x - 5$$

$$iii) y = (|\lambda| - 1)x + 4 \quad y = 4x - 1$$

$$iv) (1 - \lambda)x + y = 0 \quad (1 - \lambda)x + (\lambda^2 + 1)y = 1$$

34. Να βρείτε τον λ ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες:

$$i) y = (\lambda^2 - 3)x - 1 \quad y = \lambda x + 7$$

$$ii) y = \frac{1 - \lambda}{3}x - 6 \quad y = (\lambda + 2)x - 9$$

$$iii) y = \lambda x - 3 \quad y = \lambda^2 x + 5$$

35. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$i) f(x) = \begin{cases} 3 & , \text{αν } x \geq 2 \\ -3 & , \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

$$ii) f(x) = \begin{cases} x - 3 & , \text{αν } x \geq 1 \\ 2x - 4 & , \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

$$iii) f(x) = \begin{cases} x - 1 & , \text{αν } x > 0 \\ -x + 1 & , \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

$$iv) f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & , \text{αν } x \geq 0 \\ -2x + 1 & , \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

$$v) f(x) = \begin{cases} x & , \text{αν } x \geq 1 \\ 1 & , \text{αν } -1 < x < 1 \\ -x & , \text{αν } x \leq -1 \end{cases}$$

$$vi) f(x) = \begin{cases} 2 & , \text{αν } x \leq -2 \\ 0 & , \text{αν } -2 < x < 2 \\ -2 & , \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

36. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$i) f(x) = x^2 \quad g(x) = x^2 + 1 \quad h(x) = (x + 1)^2$$

$$ii) f(x) = |x| \quad g(x) = |x| + 3 \quad h(x) = |x + 3|$$

$$iii) f(x) = |x| \quad g(x) = |x| - 3 \quad h(x) = |x - 3|$$

$$iv) f(x) = |x| \quad g(x) = |x + 3| - 2 \quad h(x) = |x - 3| + 1$$

37. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

$$i) f(x) = 2x + 1 \quad ii) f(x) = -3x + 1 \quad iii) f(x) = \sqrt{x}$$

$$iv) f(x) = 3 - \sqrt{x - 1} \quad v) f(x) = 2 + \sqrt{1 - x}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

38. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 + 1$ ii) $f(x) = |x| + 1$ iii) $f(x) = |x - 2|$

iv) $f(x) = -x^2 - 1$ v) $f(x) = -|x| - 1$ vi) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$

vii) $f(x) = \frac{-1}{x^2 + 1}$ viii) $f(x) = \frac{4}{|x| + 1}$

39. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.

i) $f(x) = x^2$ ii) $f(x) = x^3$ iii) $f(x) = x^4 + 1$

iv) $f(x) = x^2 - 1$ v) $f(x) = x^3 - 2$ vi) $f(x) = \frac{1}{x}$

vii) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5}$ viii) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$ ix) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$

x) $f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$ xi) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ xii) $f(x) = \frac{3}{2 - x}$

xiii) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2x}$ xiv) $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$ xv) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

xvi) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 3}$ xvii) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ xviii) $f(x) = \frac{-x\sqrt{x^2 + 1}}{|x|}$

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1}$

A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

B) Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$

Γ) Να βρεθούν τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$

Δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(2, -2)$ και $B(-2, 3)$

E) Να απλοποιηθεί ο τύπος της f .