

1.α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

2. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha \neq \beta$ για

τους οποίους ισχύει: $\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$

Α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

Β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$

3. Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

Α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

4. α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$

5. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

Α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$

6. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x-4}$.

Α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$.

7. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$

Α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Β) Αν $x=3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$

8. Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

Α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$

9. Δίνονται οι αριθμοί : $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

Α) Να δείξετε ότι : $A - B = 4$.

Β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt[3]{2}$.

10. Δίνονται οι αριθμοί : $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$

Α) Να δείξετε ότι:

$$i) A + B = \frac{1}{2}$$

$$ii) A \cdot B = \frac{1}{20}$$

Β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

11. Δίνεται η παράσταση : $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$

Α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

12. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6 , B = (\sqrt[3]{3})^6 , \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6 .$$

Α) Να δείξετε ότι : $A + B + \Gamma = 23$.

Β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς : $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

Γ) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13. Δίνονται οι παραστάσεις : $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

Α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α;

Β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β;

Γ) Να δείξετε ότι , για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

14. Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

Α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$

Β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β.

15. Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$, $B=2+\sqrt{3}$ τότε :

A) Να αποδείξετε ότι : $A \cdot B = 1$

B) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$

16. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε

να ισχύουν : $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$

A) Να αποδείξετε ότι : $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

B) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$

17. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$

A) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$

B) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$

18. Δίνεται η παράσταση : $A = |3x - 6| + 2$, όπου x είναι πραγματικός αριθμός

A) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$

ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$

B) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι :

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$$

19. Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| + |y - 3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει : $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $A = x - y + 2$

ii) $0 < A < 4$

20. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$.

A) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

B) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$

21. Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| - |x - 2|$

A) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 3x - 3$

B) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x) την οποία και να υπολογίσετε.

22. Αν $0 < a < 1$, τότε :

- Α) να αποδείξετε ότι : $a^3 < a$
 Β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς : 0 , a^3 , 1 , a , $\frac{1}{a}$

23. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$ να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $x + y$

ii) $2x - 3y$

iii) $\frac{x}{y}$

24.α) Αν $a < 0$, να αποδειχθεί ότι : $a + \frac{1}{a} \leq -2$

Β) Αν $a < 0$, να αποδειχθεί ότι : $\left| a + \frac{1}{a} \right| \leq -2$

25.α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ να αποδειχθεί ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (1).

Β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

26. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$.

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$

β) $2\alpha - 2\alpha\beta$

27. Δίνονται οι παραστάσεις :

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha(3 - \beta) \quad \text{όπου} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Α) Να δείξετε ότι : $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$

Β) Να δείξετε ότι : $K \geq \Lambda$ για κάθε τιμή των α, β .

Γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

28. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$$

$$\beta) \left(\alpha + \frac{4}{\alpha} \right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta} \right) \geq 16$$

29. Σε έναν άξονα τα σημεία A, B, M αντιστοιχούν στους αριθμούς $5, 9, x$ αντίστοιχα.

A) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων

$$|x-5| \quad \text{και} \quad |x-9|$$

B) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x , που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

30. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha-1) \cdot (1-\beta) > 0$

A) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β

B) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$K = |\alpha-1| + |1-\beta|$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.