

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = 4\eta\mu\omega + 6$$

$$B = 3 - 2\sigma\upsilon\nu\omega$$

2. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90) να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$\beta) \eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B$$

3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας

$\omega = \chi\text{OM}$ όταν:

$$\alpha) M(-6, 8)$$

$$\beta) M(-4, 0)$$

$$\gamma) M(0, 5)$$

4. Να υπολογιστούν οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α=90) όταν:

$$A\Gamma = 6\text{cm} \quad \text{και} \quad \eta\mu B = \frac{3}{5}$$

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \eta\mu 17^\circ + \eta\mu 35^\circ - \sigma\upsilon\nu 73^\circ - \sigma\upsilon\nu 55^\circ$$

$$B = \frac{\sigma\upsilon\nu 56^\circ}{\eta\mu 34^\circ} + \frac{\eta\mu 50^\circ}{\sigma\upsilon\nu 40^\circ} - 4$$

6. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \eta\mu 137^\circ + \sigma\upsilon\nu 29^\circ - \eta\mu 43^\circ + \sigma\upsilon\nu 151^\circ = 0$$

$$\beta) \epsilon\phi 68^\circ - \epsilon\phi 45^\circ \cdot \epsilon\phi 22^\circ = 0$$

7. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \sigma\upsilon\nu^2 30^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 120^\circ = 1$$

$$\beta) \epsilon\phi^2 135^\circ + \epsilon\phi^2 60^\circ + 3\epsilon\phi^2 150^\circ = 5$$

8. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu(56^\circ - \chi) = \eta\mu(124^\circ + \chi)$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu(32^\circ + \chi) + \sigma\upsilon\nu(148^\circ - \chi) = 0$$

9. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu 150^\circ + \sigma\upsilon\nu 165^\circ + \eta\mu 75^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 0$$

$$\beta) \eta\mu 89^\circ + \eta\mu 91^\circ - 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 1^\circ = 0$$

10. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu(90^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(180^\circ - \omega) = 1$$

$$\beta) \eta\mu(180^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) - \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(90^\circ - \omega) = 1$$

11. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0$$

$$\gamma) \epsilon\phi A + \epsilon\phi(B - \Gamma) = 0$$

12. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \sigma\upsilon\nu 0^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ + \sigma\upsilon\nu 40^\circ + \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \dots + \sigma\upsilon\nu 140^\circ + \sigma\upsilon\nu 160^\circ + \sigma\upsilon\nu 180^\circ = 0$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu 0^\circ + \sigma\upsilon\nu 1^\circ + \sigma\upsilon\nu 2^\circ + \sigma\upsilon\nu 3^\circ + \dots + \sigma\upsilon\nu 179^\circ + \sigma\upsilon\nu 180^\circ = 0$$

13. Να υπολογιστούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών ω αν γνωρίζουμε ότι:

$$\alpha) \eta\mu\omega = \frac{12}{13}, \quad 90^\circ < \omega < 180^\circ$$

$$\beta) \eta\mu\omega = \frac{12}{13}, \quad 0^\circ < \omega < 90^\circ$$

$$\gamma) \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{7}{9}, \quad 90^\circ < \omega < 180^\circ$$

$$\delta) \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{5}, \quad 0^\circ < \omega < 90^\circ$$

14. Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$ να υπολογίσετε

α) τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω

β) την τιμή της παράστασης:

$$A = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) - \epsilon\phi(180^\circ - \omega)$$

15. Αν $0^\circ < \chi < 180^\circ$ και $6\eta\mu^2\chi = \eta\mu\chi + 1$ να βρείτε το χ

16. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2\chi - 2\sqrt{2}\eta\mu\chi + 1 = 0$ αν $0^\circ < \chi < 180^\circ$

17. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας χ αν $\varepsilon\phi\chi = -\sqrt{3}$.

18. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) 4\eta\mu^2\omega + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 4$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$$

$$\gamma) 1 + \varepsilon\phi^2\chi = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$$

$$\delta) \eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\chi$$

19. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (2\eta\mu\omega - 3\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (3\eta\mu\omega + 2\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 7$$

$$\beta) \eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = 2\eta\mu^2\omega - 1$$

$$\gamma) \frac{1 + 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha$$

20. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \varepsilon\phi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \varepsilon\phi^2\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha$$

$$\beta) \varepsilon\phi\omega + \frac{1}{\varepsilon\phi\omega} = \frac{1}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\gamma) \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 - \eta\mu\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \eta\mu\omega} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\delta) 1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1 + \eta\mu\chi} = \eta\mu\chi$$

21. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\phi^2\omega}{1 + \varepsilon\phi^2\omega}$$

$$\beta) \frac{\eta\mu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{2}{\eta\mu\omega}$$

$$\gamma) \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 - \varepsilon\phi\omega} + \frac{\eta\mu\omega}{1 - \frac{1}{\varepsilon\phi\omega}} = \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\delta) \left(\frac{1}{\eta\mu\omega} - \eta\mu\omega \right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega} - \sigma\upsilon\nu\omega \right) = \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon) \frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$$

22. Αν $\sin \chi = -\frac{3}{5}$ και $90^\circ < \chi < 180^\circ$ να υπολογίσετε το $\eta\mu\chi$, $\epsilon\phi\chi$.

23. Αν $\epsilon\phi\chi = 2$ να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{\eta\mu\chi + \sin\chi}{\sin\chi - \eta\mu\chi}$$

24. Αν $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

25. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία και $\sin\omega = -\frac{5}{6}$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

26. Αν $\sin\chi = -\frac{5}{13}$ και $90^\circ < \chi < 180^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(2\eta\mu\chi - 3\sin\chi) - (\eta\mu^2\chi - \sin^2\chi)}{2\eta\mu\chi\sin\chi}$$

27. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\eta\mu^3\chi \cdot \sin\chi - \eta\mu^5\chi \cdot \sin\chi}{\sin^3\chi \cdot \eta\mu\chi - \sin^5\chi \cdot \eta\mu\chi} = 1$$

$$\beta) \epsilon\phi\chi \cdot (\sin\chi - \sin^3\chi) = \eta\mu^3\chi$$

28. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της οξείας γωνίας ω αν $\eta\mu\omega = 3\sin\omega - 1$

29. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90$) είναι $\gamma = \frac{5}{13}\alpha$. Να υπολογίσετε

την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\eta\mu B + \sin B + 5\epsilon\phi B}{\eta\mu\Gamma + \sin\Gamma + 12\epsilon\phi\Gamma}$

30. Να αποδειχθεί ότι η παράσταση: $A = \eta\mu^4\alpha(3 - 2\eta\mu^2\alpha)\sin^4\alpha(3 - 2\sin^2\alpha)$ είναι ανεξάρτητη του α .

31. Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει: $(\eta\mu\omega - 4)^2 + \sin^2\omega = 13$

α) να βρείτε το $\eta\mu\omega$

β) Αν το $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$

ι) Να βρείτε το $\sin\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$

υ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = 2\eta\mu(180^\circ - \omega) + \frac{4}{\sqrt{3}}\sigma\upsilon\nu\omega - \sqrt{3}\epsilon\phi(180 - \omega)$$

32. Αν γνωρίζετε ότι $90^\circ < \omega < 180^\circ$ και $\eta\mu\omega = \frac{1}{3}$ τότε:

α) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω

β) Να αποδείξετε ότι : $4\sqrt{2}\epsilon\phi\omega + 2\sigma\upsilon\nu^2\omega + 2\eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu 90^\circ$

33. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία και $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$

α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{5}{13}$ και $\epsilon\phi\omega = -\frac{12}{5}$

β) Να συμπληρώσετε τα κενά: $\eta\mu(180-\omega) = \dots\dots\dots$ $\sigma\upsilon\nu(180-\omega) = \dots\dots\dots$

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(180 - \omega)}{\epsilon\phi 135^\circ \cdot \eta\mu(180 - \omega)}$$

34. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \sqrt{48}$, $\beta = 8$, $A = 60^\circ$.

Να υπολογίσετε τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου

35. Να επιλυθούν τα τρίγωνα με τα εξής στοιχεία:

α) $A = 30^\circ, B = 30^\circ, \alpha = 30\text{cm}$

β) $A = 30^\circ, \alpha = 7\text{cm}, \beta = 4\text{cm}$

36. Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει $a \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$ να αποδείξετε ότι τρίγωνο είναι ισοσκελές.

37. Σε κύκλο ακτίνας 6 cm θεωρούμε χορδή ΑΒ μήκους 9 cm. Να υπολογίσετε τη γωνία που φαίνεται η ΑΒ από το κέντρο του κύκλου.