## ► Εκθετική συνάρτηση

Αν α θετικός πραγματικός αριθμός, σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί η δύναμη $\alpha^x$. Έτσι ορίζεται η συνάρτηση :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \alpha^x,\ 0 < \alpha \neq 1$$

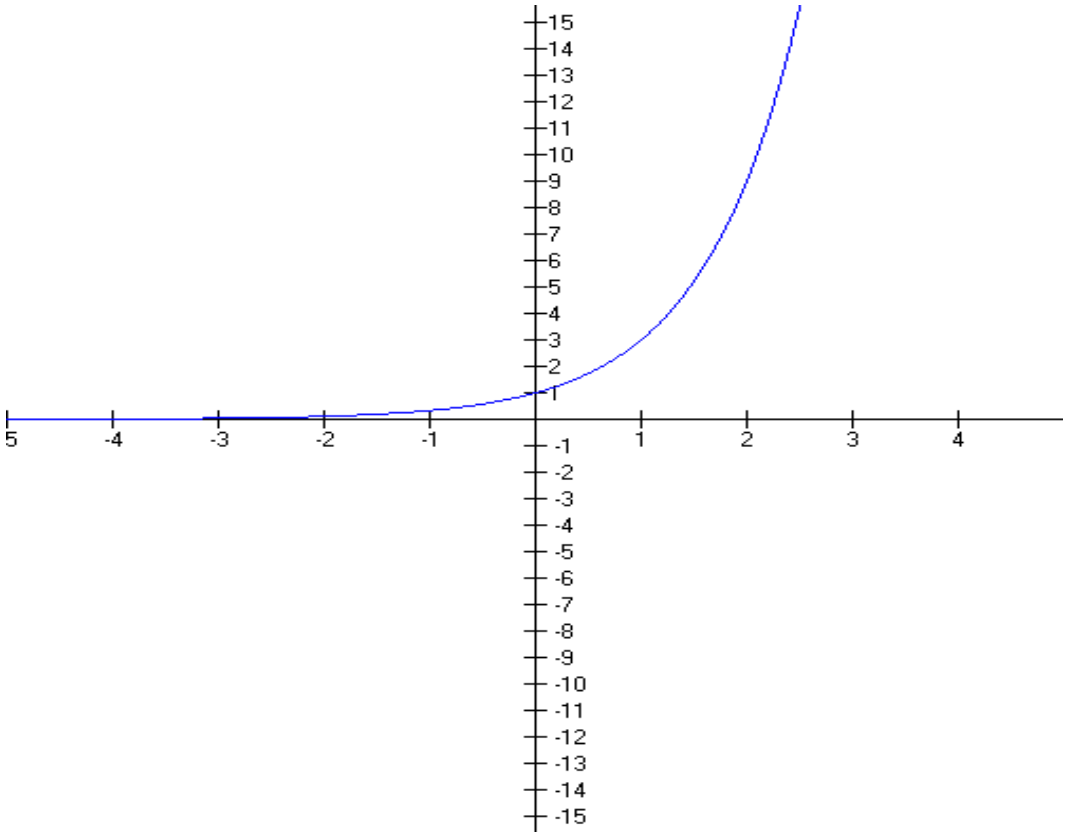
η οποία ονομάζεται εκθετική συνάρτηση με βάση α. Αν $\alpha = 1$, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.

■ Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση : $f(x) = 3^x$.

Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση, θεωρούμε τον πίνακα :

| x | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 3^x$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 | 9 | 27 |

και έχουμε :




Για τη συνάρτηση αυτή και για κάθε συνάρτηση της γενικής μορφής :

$$f(x)=\alpha^x,\ \mu\varepsilon\ \alpha>1$$

έχουμε :

- Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
- Σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Γνησίως αύξουσα, διότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, επειδή $\alpha>1$ ισχύει :

$$\alpha\nu\ \ x_1<x_2\Rightarrow\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}$$

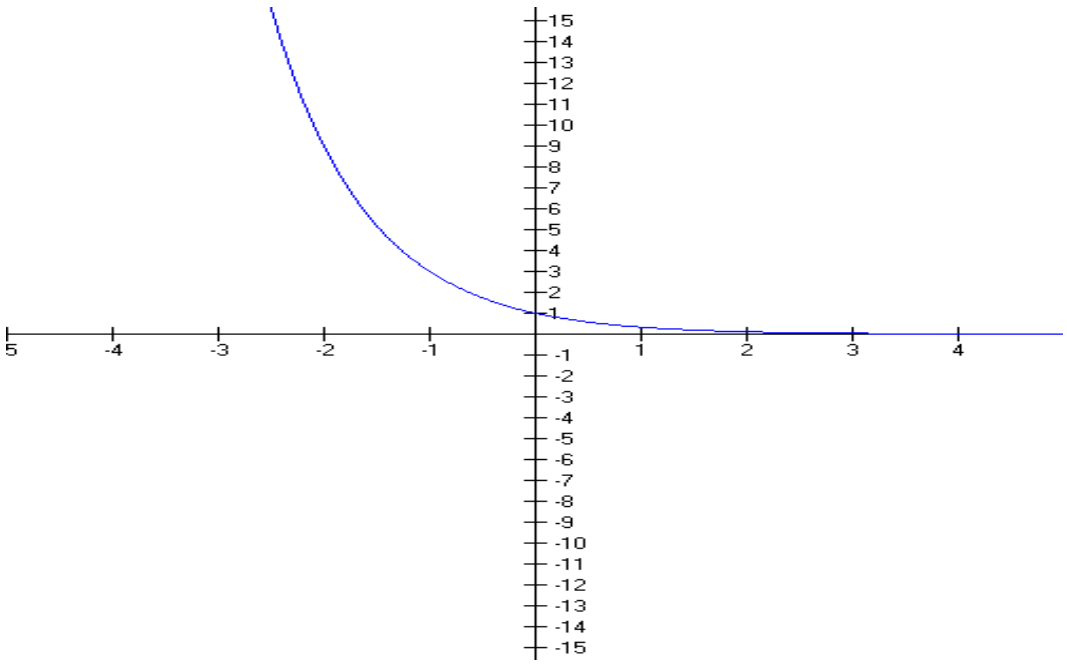
- Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα x.

■ Θεωρούμε τη συνάρτηση : $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

και προκειμένου να κάνουμε τη γραφική της παράσταση, θεωρούμε τον πίνακα :

| x | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 27 | 9 | 3 | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{27}$ |

και έχουμε :




Για τη συνάρτηση αυτή και για κάθε συνάρτηση της μορφής :

$$f\ x\ =\alpha^{x}\ \text{με}\ 0<\alpha<1$$

έχουμε :

▪ Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

▪ Σύνολο τιμών το διάστημα $0,+\infty$ των θετικών πραγματικών αριθμών.

▪ Γνησίως φθίνουσα , διότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, επειδή $0<\alpha<1$ ισχύει :

$$\text{αν}\ \ x_1<x_2\Rightarrow\alpha^{x_1}>\alpha^{x_2}$$

▪ Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A\ 0,1$ και έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα x.

**<u>Παρατηρήσεις :</u>**

**1.** Επειδή η εκθετική συνάρτηση : $f\ x\ =\alpha^{x}$ με $0<\alpha\neq1$ είναι γνησίως μονότονη, ισχύει :

$$\text{αν}\ \ x_1\neq x_2\Rightarrow\alpha^{x_1}\neq\alpha^{x_2}\ .$$

Επομένως με την επαγωγή σε άτοπο, μπορούμε να έχουμε :

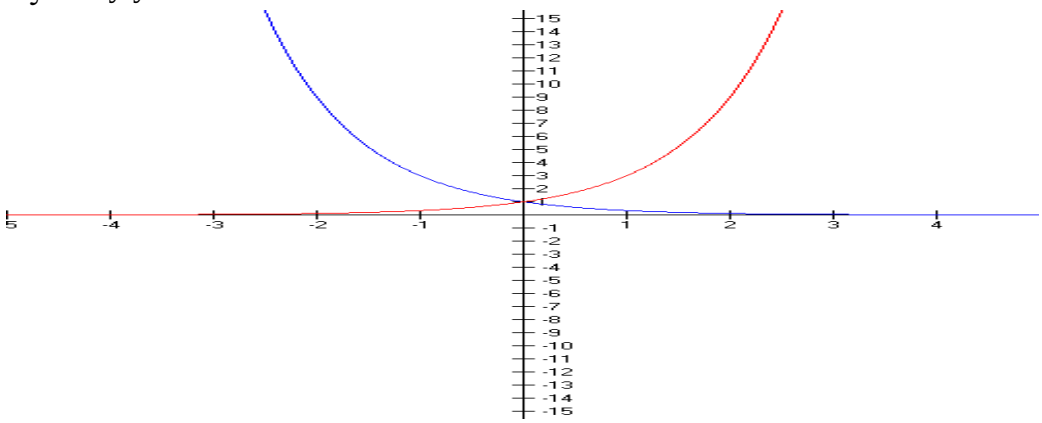
$$\text{αν}\ \ \alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2\ .$$

**Με την βοήθεια της συνεπαγωγής αυτής, μπορούμε να λύνουμε εκθετικές εξισώσεις, δηλαδή εξισώσεις που έχουν τον άγνωστο στον εκθέτη.**

**2.** Για τις συναρτήσεις : $f\ x\ =\alpha^{x},\ \ g\ x\ =\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{x},\ \ 0<\alpha\neq1$

παρατηρούμε ότι ισχύει : $g\ x\ =\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{x}=\frac{1}{\alpha^{x}}=\alpha^{-x}=f\ -x\ ,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις τους, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.



# ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $3^{x+1}=81$

ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{1}{81}$

iii) $4^{x}=\frac{1}{16}$

iv) $\frac{1}{5^{x}}=125$

**ΛΥΣΗ**

i) $3^{x+1}=81\Leftrightarrow 3^{x+1}=3^{4}\Leftrightarrow x+1=4\Leftrightarrow x=3$

ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{1}{81}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\Leftrightarrow x=4$

iii) $4^{x}=\frac{1}{16}\Leftrightarrow 4^{x}=\frac{1}{4^{2}}\Leftrightarrow 4^{x}=4^{-2}\Leftrightarrow x=-2$

iv) $\frac{1}{5^{x}}=125\Leftrightarrow 5^{-x}=5^{3}\Leftrightarrow -x=3\Leftrightarrow x=-3$

**2.** Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $9^{x}=\frac{1}{3}$

ii) $e^{x+1}=\frac{1}{e^{3+x}}$

iii) $8^{x-1}=4^{2-3x}$

iv) $5^{x^{2}-3x+2}=1$

**ΛΥΣΗ**

i) $9^{x}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 9^{x}=3^{-1}\Leftrightarrow \left(3^{2}\right)^{x}=3^{-1}\Leftrightarrow 3^{2x}=3^{-1}\Leftrightarrow 2x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

ii) $e^{x+1}=\frac{1}{e^{3+x}}\Leftrightarrow e^{x+1}=e^{-3+x}\Leftrightarrow x+1=-3+x\Leftrightarrow x+1=-3-x\Leftrightarrow$
$2x=-4\Leftrightarrow x=-2$

iii) $8^{x-1}=4^{2-3x}\Leftrightarrow 2^{3(x-1)}=2^{2(2-3x)}\Leftrightarrow 2^{3x-1}=2^{2(2-3x)}\Leftrightarrow 3(x-1)=2(2-3x)\Leftrightarrow$
$3x-3=4-6x\Leftrightarrow x=\frac{7}{9}$

iv) $5^{x^2-3x+2}=1\Leftrightarrow 5^{x^2-3x+2}=5^0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$.

**3.** Να λυθεί η εξίσωση : $2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x-1}+2^{x-2}=54$.

**ΛΥΣΗ**

$2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x-1}+2^{x-2}=54\Leftrightarrow 2^x\cdot 2+2^x\cdot 2^2+\frac{2^x}{2}+\frac{2^x}{2^2}=54$

Θέτω $2^x=y$ και η εξίσωση γίνεται :

$$2y+4y+\frac{y}{2}+\frac{y}{4}=54\Leftrightarrow 27y=216\Leftrightarrow y=8$$

οπότε $2^x=8\Leftrightarrow 2^x=2^3\Leftrightarrow x=3$.

**4.** Να λυθεί η εξίσωση : $9^x+3^{x+1}-4=0$.

**ΛΥΣΗ**

$9^x+3^{x+1}-4=0\Leftrightarrow (3^2)^x+3\cdot 3^x-4=0\Leftrightarrow (3^x)^2+3\cdot 3^x-4=0$

Θέτω $3^x=y$ και η εξίσωση γίνεται : $y^2+3y-4=0$
που έχει ρίζες $y_1=1$ και $y_2=-4$.

- Για $y=1$ έχω : $3^x=1\Leftrightarrow 3^x=3^0\Leftrightarrow x=0$
- Για $y=-4$ έχω : $3^x=-4$ αδύνατη γιατί $3^x>0$.

**5.** Να λυθεί η εξίσωση : $3\sqrt[x]{81}-10\cdot\sqrt[x]{9}+3=0$ (1)

**ΛΥΣΗ**

Η (1) ορίζεται όταν x είναι φυσικός μεγαλύτερος του 1.

Έτσι $3\cdot\sqrt[x]{9^2}-10\cdot\sqrt[x]{9}+3=0\Leftrightarrow 3\cdot 9^{\frac{2}{x}}-10\cdot 9^{\frac{1}{x}}+3=0$

Θέτω $9^{\frac{1}{x}}=y$ άρα έχω : $3y^2-10y+3=0\Leftrightarrow y=3$ ή $y=\frac{1}{3}$.

▪ Αν $y=3$ τότε $9^{\frac{1}{x}}=3\Leftrightarrow 3^{2\ \frac{1}{x}}=3\Leftrightarrow 3^{\frac{2}{x}}=3\Leftrightarrow \frac{2}{x}=1\Leftrightarrow x=2$

▪ Αν $y=\frac{1}{3}$ τότε $9^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3^{2\ \frac{1}{x}}=3^{-1}\Leftrightarrow 3^{\frac{2}{x}}=3^{-1}\Leftrightarrow \frac{2}{x}=-1\Leftrightarrow x=-2$

Απορρίπτεται

**6.** Να λυθεί το σύστημα : $\begin{matrix}2^{x+1}\cdot 4^y=1\\ 3^x\cdot 3^{y+1}=9\end{matrix}$.

**ΛΥΣΗ**

$$\left.\begin{matrix}2^{x+1}\cdot 2^{2y}=1\\ 3^x\cdot 3^{y+1}=9\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}2^{x+1+2y}=2^0\\ 3^{x+y+1}=3^2\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x+2y+1=0\\ x+y+1=2\end{matrix}\right\}\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

Αφαιρώντας από τη (1) την (2) προκύπτει : $y=-2$ και αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε $x=3$.

**7.** Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $2^x-5\cdot\sqrt{2}^x+4=0$ ii) $5\cdot 2^x=2^{x+3}-3\sqrt{2}$

iii) $3^{x+1}-28+9\cdot 3^{-x}=0$ iv) $2^{x-2}-3^{x-3}-2^{x-3}+3^{x-4}=0$

v) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

**ΛΥΣΗ**

i) $2^x-5\cdot\sqrt{2}^x+4=0$

Θέτουμε $\sqrt{2}^x=t$, οπότε η επιλύουσα της (1) είναι η : $t^2-5t+4=0$ (2).

Η διακρίνουσα του τριωνύμου της σχέσης (2) είναι :

$\Delta=25-4\cdot 4=25-16=9$ και επομένως οι ρίζες είναι : $t=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{5+3}{2}=4\\ \frac{5-3}{2}=1\end{cases}$

▪ Αν $t=4\Rightarrow\sqrt{2}^{x}=4\Rightarrow 2^{\frac{x}{2}}=2^{2}\Rightarrow\frac{x}{2}=2\Rightarrow x=4$

▪ Αν $t=1\Rightarrow\sqrt{2}^{x}=1\Rightarrow 2^{\frac{x}{2}}=2^{0}\Rightarrow\frac{x}{2}=0\Rightarrow x=0$

ii) $5\cdot 2^{x}=2^{x+3}-3\sqrt{2}\Rightarrow 5\cdot 2^{x}=2^{x}\cdot 2^{3}-3\sqrt{2}\Rightarrow 5\cdot 2^{x}=8\cdot 2^{x}-3\sqrt{2}\Rightarrow$
$3\cdot 2^{x}=3\sqrt{2}\Rightarrow 2^{x}=\sqrt{2}\Rightarrow 2^{x}=2^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

iii) $3^{x+1}-28+9\cdot 3^{-x}=0\Rightarrow 3^{x}\cdot 3-28+9\cdot\frac{1}{3^{x}}=0\Rightarrow 3\cdot\left(3^{x}\right)^{2}-28\cdot 3^{x}+9=0$ (1)
Θέτουμε $3^{x}=t$, οπότε η επιλύουσα της (1) είναι η : $3t^{2}-28t+9=0$ (2).
Η διακρίνουσα του τριωνύμου της σχέσης (2) είναι :
$\Delta=28-4\cdot 3\cdot 9=4^{2}\cdot 7^{2}-4\cdot 27=4\left(4\cdot 49-27\right)=4\cdot\left(196-27\right)=4\cdot 169=\left(2\cdot 13\right)^{2}=26^{2}$
και επομένως οι ρίζες είναι : $t=\frac{28\pm 26}{2\cdot 3}=\begin{cases}\frac{28+26}{6}=\frac{54}{6}=9\\ \frac{28-26}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\end{cases}$

▪ Αν $t=9\Rightarrow 3^{x}=9\Rightarrow 3^{x}=3^{2}\Rightarrow x=2$

▪ Αν $t=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^{x}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^{x}=3^{-1}\Rightarrow x=-1$

iv) $2^{x-2}-3^{x-3}-2^{x-3}+3^{x-4}=0\Rightarrow 2^{x}\cdot 2^{-2}-3^{x}\cdot 3^{-3}-2^{x}\cdot 2^{-3}+3^{x}\cdot 3^{-4}=0\Rightarrow$
$\frac{2^{x}}{4}-\frac{3^{x}}{27}-\frac{2^{x}}{8}+\frac{3^{x}}{81}=0\Rightarrow\frac{2^{x}}{4}-\frac{2^{x}}{8}=\frac{3^{x}}{27}-\frac{3^{x}}{81}\Rightarrow 2^{x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)=3^{x}\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{81}\right)\Rightarrow$
$\frac{1}{8}\cdot 2^{x}=\frac{2}{81}\cdot 3^{x}\Rightarrow\frac{2^{x}}{3^{x}}=\frac{16}{81}\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\Rightarrow x=4$

v) $4^{x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}\Rightarrow 4^{x}-3^{x}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}=3^{x}\cdot 3^{\frac{1}{2}}-4^{x}\cdot 2^{-1}\Rightarrow$
$4^{x}-\frac{3^{x}}{3^{\frac{1}{2}}}=3^{x}\cdot 3^{\frac{1}{2}}-\frac{4^{x}}{2}\Rightarrow 4^{x}-\frac{3^{x}}{\sqrt{3}}=3^{x}\cdot\sqrt{3}-\frac{4^{x}}{2}\Rightarrow$
$2\sqrt{3}\cdot 4^{x}-2\cdot 3^{x}=6\cdot 3^{x}-\sqrt{3}\cdot 4^{x}\Rightarrow 3\sqrt{3}\cdot 4^{x}=8\cdot 3^{x}\Rightarrow\frac{4^{x}}{3^{x}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\Rightarrow$
$\left(\frac{4}{3}\right)^{x}=\frac{2^{3}}{3\cdot 3^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{x}=\frac{\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{3}}{3\cdot 3^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{x}=\frac{4^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{x}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

**8.** Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $3^{\eta\mu 2x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ii) $3^{\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu x}=9^{1-2\eta\mu^2\frac{x}{2}}$

iii) $2^{\eta\mu x}\cdot 4^{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}=\sqrt[5]{32^{\eta\mu 3x}}$

**ΛΥΣΗ**

i) $3^{\eta\mu 2x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow 3^{\eta\mu 2x}=\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow 3^{\eta\mu 2x}=3^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow \eta\mu 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \eta\mu 2x=-\eta\mu\frac{\pi}{6}\Rightarrow$

$\eta\mu 2x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right).$

Άρα $\begin{cases}2x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{12}\\ 2x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}\Rightarrow x=\kappa\pi+\frac{7\pi}{12}\end{cases}$

ii) $3^{\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu x}=9^{1-2\eta\mu^2\frac{x}{2}}\Rightarrow 3^{\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu x}=\ 3^{2\ 1-2\eta\mu^2\frac{x}{2}}\Rightarrow 3^{\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu x}=3^{2-4\eta\mu^2\frac{x}{2}}\Rightarrow$

$\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu x=2-4\eta\mu^2\frac{x}{2}\Rightarrow \eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu x=2\left(1-2\eta\mu^2\frac{x}{2}\right)\Rightarrow$

$2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x=2\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow 2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-3\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x\ \ 2\eta\mu x-3\ =0\Rightarrow\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\\ \eta\mu x=\frac{3}{2}\quad(\text{αδύνατη})\end{cases}$

iii) $2^{\eta\mu x}\cdot 4^{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}=\sqrt[5]{32^{\eta\mu 3x}}\Rightarrow 2^{\eta\mu x}\cdot 2^{2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}=32^{\frac{\eta\mu 3x}{5}}\Rightarrow 2^{\eta\mu x+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\ 2^{5\ \frac{\eta\mu 3x}{5}}\Rightarrow$

$2^{\eta\mu x+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=2^{\eta\mu 3x}\Rightarrow \eta\mu x+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu 3x\Rightarrow \eta\mu x+\eta\mu 2x=\eta\mu 3x\Rightarrow$

$2\eta\mu\frac{3x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=2\eta\mu\frac{3x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}\Rightarrow 2\eta\mu\frac{3x}{2}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\eta\mu\frac{3x}{2}=0\\ \sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\end{cases}$

▪ Από την σχέση (1) παίρνουμε:

$\eta\mu\frac{3x}{2}=0\Rightarrow\frac{3x}{2}=\kappa\pi\Rightarrow 3x=2\kappa\pi\Rightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{3},\quad \kappa\in\mathbb{Z}.$

▪ Από την σχέση (2) παίρνουμε :

$$\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{3x}{2}=2\kappa\pi\pm\frac{x}{2}\Rightarrow 3x=4\kappa\pi\pm x\Rightarrow\begin{cases}3x=4\kappa\pi+x\Rightarrow 2x=4\kappa\pi\Rightarrow x=\\ 3x=4\kappa\pi-x\Rightarrow 4x=4\kappa\pi\Rightarrow x=\end{cases}$$

**9.** Να λυθεί η εξίσωση : $2^{x^2+x-6}-2^{x^2+x-9}=56.$

**ΛΥΣΗ**

$2^{x^2+x-6}-2^{x^2+x-6-3}=56\Leftrightarrow 2^{x^2+x-6}-2^{x^2+x-6}\cdot 2^{-3}=56$

Θέτω $2^{x^2+x-6}=y$ έχουμε : $y-y\cdot 2^{-3}=56\Leftrightarrow y-\frac{y}{8}=56\Leftrightarrow y=64$

Άρα $2^{x^2+x-6}=64\Leftrightarrow 2^{x^2+x-6}=2^6\Leftrightarrow x^2+x-6=6\Leftrightarrow$

$x^2+x-12=0\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-4$

**10.**i) Να βρείτε το $\alpha\neq 5$ ώστε η $f(x)=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha-5}\right)^x$ να είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε το α, $\alpha\neq 0$ ώστε η $g(x)=\left(1-\frac{5}{\alpha}\right)^x$ να είναι γνησίως φθίνουσα.

**ΛΥΣΗ**

i) Για να είναι η f γνησίως αύξουσα θα πρέπει:

$\frac{1-\alpha}{\alpha-5}>1\Leftrightarrow\frac{1-\alpha}{\alpha-5}-1>0\Leftrightarrow\frac{1-\alpha-\alpha+5}{\alpha-5}>0\Leftrightarrow\frac{-2\alpha+6}{\alpha-5}>0\Leftrightarrow (-2\alpha+6)(\alpha-5)>0\Leftrightarrow$

$2(-\alpha+3)(\alpha-5)>0\Leftrightarrow(\alpha-3)(\alpha-5)<0\Leftrightarrow\alpha\in(3,5)$ .

ii) Για να είναι η g γνησίως φθίνουσα θα πρέπει:

$$0<1-\frac{5}{\alpha}<1\Leftrightarrow\begin{cases}1-\frac{5}{\alpha}>0\Leftrightarrow\frac{\alpha-5}{\alpha}>0\Leftrightarrow\alpha(\alpha-5)>0\Leftrightarrow\alpha\in(-\infty,0)\cup(5,+\infty)\\ 1-\frac{5}{\alpha}<1\Leftrightarrow-\frac{5}{\alpha}<0\Leftrightarrow-5\alpha<0\Leftrightarrow\alpha>0\end{cases}$$

Επομένως πρέπει $\alpha>5$.

**11.** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=(1-k^2)^x$.

i) Για ποιες τιμές του k ορίζεται η f ;

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές k για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να βρείτε το k ώστε η γραφική παράσταση της $f\ x$ να περνάει από το σημείο $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

iv) Να βρείτε τις τιμές του k ώστε η γραφική παράσταση της $f\ x$ να περνάει από το σημείο $\Sigma\ 2,1$ .

**ΛΥΣΗ**

i) Πρέπει: $1-k^2>0\Leftrightarrow k^2<1\Leftrightarrow |k|<1\Leftrightarrow k\in\ -1,1$ (1)

ii) Για να είναι η f γνησίως αύξουσα πρέπει:
$1-k^2>1\Leftrightarrow -k^2>0\Leftrightarrow k^2<0$ (2)
Η (2) όμως είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, άρα δεν υπάρχουν τιμές του k, για τις οποίες η f να είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Πρέπει να ισχύει: $f\ 1\ =\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-k^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

iv) Πρέπει να ισχύει:

$$f\ 2\ =1\Leftrightarrow\ 1-k^{2\ 2}=1\Leftrightarrow 1-k^2=\pm 1\Leftrightarrow\begin{cases}1-k^2=1\Leftrightarrow k^2=0\Leftrightarrow k=0\\ 1-k^2=-1\overset{1}{\Leftrightarrow}\ \text{αδύνατη}\end{cases}$$

**12.** Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $9^x<3$ ii) $2^{|x|}-8>0$ iii) $\left(\frac{e}{2}\right)^x-1>0$

**ΛΥΣΗ**

i) $9^x<3\Leftrightarrow 3^{2x}<3^1\Leftrightarrow 2x<1\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$ (γιατί 3>1).

ii) $2^{|x|}-8>0\Leftrightarrow 2^{|x|}>2^3\Leftrightarrow |x|>3\Leftrightarrow$ (γιατί 2>1).

$x<-3$ ή $x>3$

iii) $\left(\frac{e}{2}\right)^x-1>0\Leftrightarrow\left(\frac{e}{2}\right)^x>1\Leftrightarrow\left(\frac{e}{2}\right)^x>\left(\frac{e}{2}\right)^0\Leftrightarrow x>0$ (γιατί $\frac{e}{2}>1$).

**13.** Να λύσετε την ανίσωση $5^x+5^{1-x}<6$.

**ΛΥΣΗ**

$$5^x+5^{1-x}<6\Leftrightarrow 5^x+\frac{5}{5^x}<6\Leftrightarrow 5^{2x}+5<6\cdot 5^x\Leftrightarrow 5^{2x}-6\cdot 5^x+5<0$$

Θέτω $5^x = y$

Άρα η ανίσωση γίνεται $y^2 - 6y + 5 < 0$.

Είναι $y^2 - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = 5$

| | 1 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|
| + | | − | | + |

Άρα $1 < y < 5 \Leftrightarrow 1 < 5^x < 5 \Leftrightarrow 5^0 < 5^x < 5^1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ (γιατί 5>1).

**14.** Να λύσετε τα συστήματα.

i) $\begin{cases} 9^{x+1} = 3^{y+3} \\ 4^{x+y} = 8 \cdot 2^x \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ x + y = 8 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 2^{x-1} \cdot 4^y = 1 \\ 3^x \cdot 3^{y-1} = 9 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} 3^x - 5^y = 4 \\ 9 \cdot 3^{-x} + 5^y = 6 \end{cases}$

**ΛΥΣΗ**

i) $\begin{cases} 9^{x+1} = 3^{y+3} \\ 4^{x+y} = 8 \cdot 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x+2} = 3^{y+3} \\ 2^{2x+2y} = 2^3 \cdot 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x+2} = 3^{y+3} \\ 2^{2x+2y} = 2^{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = y + 3 \\ 2x + 2y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 2^0 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ή } x = 3 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 2^{x-1} \cdot 4^y = 1 \\ 3^x \cdot 3^{y-1} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1} \cdot 2^{2y} = 2^0 \\ 3^x \cdot 3^{y-1} = 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1+2y} = 2^0 \\ 3^{x+y-1} = 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 + 2y = 0 \\ x + y - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix} x+2y=1 \\ x+y=3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -x-2y=-1 \\ x+y=3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -y=2 \\ x+y=3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=-2 \\ x=5 \end{matrix}\right\}$$

iv) $$\left.\begin{matrix} 3^x-5^y=4 \\ 9\cdot 3^{-x}+5^y=6 \end{matrix}\right\} \overset{3^x=\alpha,5^y=\beta}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} \alpha-\beta=4 \\ \frac{9}{\alpha}+\beta=6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha-\beta=4 \\ \frac{9}{\alpha}+\alpha=10 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha-\beta=4 \\ \alpha^2-10\alpha+9=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha-\beta=4 \\ \alpha=1 \text{ ή } \alpha=9 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} \alpha-\beta=4 \\ \alpha=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \beta=-3 \\ \alpha=1 \end{matrix}\right\} \overset{3^x=\alpha,5^y=\beta}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} 5^y=-3 \\ 3^x=1 \end{matrix}\right\} \text{ αδύνατη} \\ \left.\begin{matrix} \alpha-\beta=4 \\ \alpha=9 \end{matrix}\right\} \overset{3^x=\alpha,5^y=\beta}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} 5^y=5 \\ 3^x=9 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 5^y=5^1 \\ 3^x=3^2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=1 \\ x=2 \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

**15.** Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 10 χρόνια και η αρχική ποσότητα είναι 20 γραμμάρια :
i) να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού
ii) να υπολογίσετε την ποσότητα που έχει απομείνει μετά από 20 χρόνια
iii) να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει $\frac{5}{256}$ γραμμάρια του ραδιενεργού υλικού.

**ΛΥΣΗ**

i) Επειδή η ποσότητα Q του ραδιενεργού υλικού ακολουθεί τον νόμο της εκθετικής απόσβεσης έχουμε: $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$

Επειδή $Q_0=20$ γραμμάρια είναι $Q(t)=20\cdot e^{ct}$

Αφού η ημιζωή είναι $t_0=10$ χρόνια έχουμε:

$$Q(t_0)=\frac{Q_0}{2} \Leftrightarrow Q(10)=\frac{20}{2} \Leftrightarrow 20\cdot e^{10c}=10 \Leftrightarrow (e^c)^{10}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^c=\sqrt[10]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$e^c=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}} \Leftrightarrow e^c=2^{-\frac{1}{10}}$$

Άρα $$Q(t)=20\cdot e^{ct}=20\cdot (e^c)^t=20\cdot\left(2^{-\frac{1}{10}}\right)=20\cdot 2^{-\frac{t}{10}}$$

ii) Η ποσότητα που θα έχει απομείνει μετά από 20 χρόνια είναι:

$$Q(20)=20\cdot e^{-\frac{20}{10}}=20\cdot\frac{1}{2^2}=5 \text{ γραμμάρια}$$

iii) Έστω ότι μετά από t χρόνια θα έχουν απομείνει $\frac{5}{256}$ γραμμάρια.

Είναι Q t $=\frac{5}{256}\Leftrightarrow 20\cdot 2^{-\frac{t}{20}}=\frac{5}{256}\Leftrightarrow 2^{-\frac{t}{20}}=2^{-10}\Leftrightarrow t=100$ χρόνια.

## ***ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ***

1.Ισχύει ότι:

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \prec 2^x$ Σ Λ

ii) $\left(\sqrt{3}\right)^x \neq \left(\sqrt{5}\right)^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Σ Λ

iii) $\left(\sqrt{3}\right)^{-x} > 3^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Σ Λ

iv) $(-1)^{2x}=1^{2x}$ αν χ ακέραιος Σ Λ

v) $(-1)^{2x+1}=-1$ αν χ ακέραιος Σ Λ

2.Ισχύει ότι:

i) $(x+1)^{x-1}=1$ αν χ=1 Σ Λ

ii) $(x-1)^x=1$ αν χ=0 Σ Λ

iii) $x^{1+x}=1$ αν χ=1 Σ Λ

3.Ισχύει ότι:

i) $(0,8)^x > (0,8)^y$ αν x<y Σ Λ

ii) $(1,5)^x < (1,5)^y$ αν x<y Σ Λ

iii) $(2e)^x > (2e)^y$ αν x>y Σ Λ

4.Δίνεται η $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

i) Hf έχει πεδίο ορισμού το R Σ Λ

ii) Hf έχει σύνολο τιμών το R Σ Λ

iii) Hf είναι γνησίως αύξουσα στο R Σ Λ

iv) Ισχύει ότι f(2)>f(1/5) Σ Λ

v) Ισχύει ότι $f(2^{1999}) > f(2^{2000})$ Σ Λ

# ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1**. Αν f(x)=$\left(\frac{a-3}{a+3}\right)^x$ , x$\in$Q , να βρεθεί το α ώστε η συνάρτηση f(x)να είναι γνησίως αύξουσα

**2.**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{2-a}{2a-1}\right)^x$

Α)Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η f :
i)Να ορίζεται σ΄όλο το R.
ii)Να είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

**3.**Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση $f(x)=\left(|\lambda|-2\right)^x$

Α)ορίζεται σε όλο το R
Β)είναι εκθετική
Γ)είναι γνησίως αύξουσα στο R
Δ)είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

**4**.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}2^x & , \ x\le 2\\ (x-4)^2 & ,2<x\le 5\end{cases}$

Α)να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f
Β)να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f
Γ)να βρείτε τα ακρότατα της f.

**5**.Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ και g(x)=$2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Να αποδείξετε ότι :
Α)η f είναι γνησίως αύξουσα στο R
Β)η g είναι άρτια
Γ)η $h(x)=f^2(x)-g^2(x)$ είναι σταθερή.
Δ) η g έχει ελάχιστο στο 0.

**6.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3^{x+1}=81$ δ) $\frac{1}{5^x}=125$ η) $e^{x+1}=\frac{1}{e^{3+x}}$ κ) $16^{2\chi-1}=\frac{1}{4}$

β) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$ ε) $9^x=\frac{1}{3}$ θ) $5^{x-3\chi+2}=1$ λ) $2^x=4^{8x+5}$

γ) $4^x=\frac{1}{16}$ ζ) $8^{x-1}=4^{2-3\chi}$ ι) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1}=\frac{5}{3}$

**7.** Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $49^x=7$ ii) $4^{2x}=32$

iii) $4^x=\frac{1}{8}$ iv) $9^{2x+1}=27$

v) $\sqrt{2}=2\cdot 2^x$ vi) $3\cdot 9^x=\sqrt[3]{9}$

**8.**Να λύσετε τις εξισώσεις:

*i*) $2^{x-1}-3^{x-3}=2^{x-3}+3^{x-4}$

*ii*) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$

*iii*) $4^{x+1}-9\cdot 2^x+2=0$

*iv*) $9^{x+1}-36\cdot 3^{x-1}+3=0$

*v*) $2^x-5\cdot\sqrt{2^x}+4=0$

**9.**Να λύσετε τις εξισώσεις:

*i*) $3^{x+1}=5^{x+1}$

*ii*) $4\cdot 3^{x+1}-5^x=4\cdot 5^x+3^{x+2}$

*iii*) $\left(x^2-5x+5\right)^{x+2}=1$

*iv*) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

**10.**Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $4^x-5\ 2^x=24$ γ) $5^x-24=\frac{25}{5^x}$

β) $5^{2x-1}+3\ 5^{x+1}-80=0$ δ) $e^x+\frac{1}{e^x}=\frac{10}{3}$

**11.** Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $2^{x+1}+8\cdot 2^{x-2}=16$

ii) $9\cdot 3^{x-1}+3^{x+2}=36$

iii) $2^{x-1}+2^{x-2}-2^{x-3}=10$

**12.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{1}{8}4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$ β) $25^x-7^x-35\cdot 5^{2x}+5\cdot 7^{x+1}=0$

γ) $5\sqrt{2^x}=2^x+4$ δ) $3^{x+1}-2^x=3^{x-1}+2^{x+3}$

**13.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

*i*) $e^{3x}+2e^x-3e^{-x}=0$

*ii*) $3^{x^2}-18\cdot 3^{x-1}=3^{x+1}$

*iii*) $3^x-4\cdot\sqrt{3^x}+3=0$

*iv*) $2\cdot 4^x+3\cdot 9^x=5\cdot 6^x$

**14.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $5^{x-1}=10^x\,2^{-x}\,5^{x+1}$ β) $2^{x+1}\,5^x=200$

γ) $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$ δ) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$

**15.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3^{x-3}+2\cdot 5^{x-6}+5^{x-5}=5^{x-4}+3^{x-4}$ β) $5^{x-1}-2=\frac{3}{5^{x-2}}$

γ) $5^{2x-3}-2\cdot 5^{x-2}=3$ δ) $3\cdot 2^{x+3}=192\cdot 3^{x-3}$

ε) $7^{3x+2}+4^{x+2}=7^{3x+4}+4^{x+3}$ ζ) $3\cdot 2^{x-4}+6\cdot 5^{x-3}=2^{x-1}+5^{x-2}$

η) $5^{x+3}+21\cdot 3^x-5^{x+2}=3^{x+4}$

**16.** Να λυθούν οι εξισώσεις.

α) $4^{\frac{2}{x}}-5\cdot 4^{\frac{1}{x}}+4=0$ β) $2^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{1}{x}}=2$

γ) $4^{\frac{2x+1}{2}}-2^x=\frac{3}{2}$ δ) $5^{\frac{2}{x}}-6\cdot 5^{\frac{1}{x}}+5=0$

**17.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

*i*) $\sqrt[4]{2^{x+2}} = 16\sqrt{2^{x-1}}$

*ii*) $3^{x-1} - 4\sqrt{3^{x-2}} + 1 = 0$

*iii*) $5\cdot 2^{2x} - 7\cdot 10^{x} + 2\cdot 5^{2x} = 0$

*iv*) $4^{x+1} - 12\cdot 6^{x-1} - 6\cdot 9^{x} = 0$

*v*) $7^{x^2-2x+1} = 5^{(x-1)^2}$

**18**.Να λύσετε τις εξισώσεις:

*i*) $\left(x^2 - 3x + 1\right)^{3x-5} = 1$

*ii*) $\left(x-3\right)^{2x^2-5x-3} = \left(x-3\right)^{x^2-4x+3}$

**19.** Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $2+2^2+2^3+\ldots\ldots+2^x=4094$

β) $6^2\ 6^4\ 6^6\ldots\ldots..6^{2x}=36^{28}$

γ) $3\ 3^2\ 3^3\ 3^4\ldots\ldots.3^{x+1}=27$

**20.** Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $5^{2\eta\mu\chi-\eta\mu 2\chi}=1$ β) $2^{\eta\mu\chi}+8\cdot 2^{-\eta\mu\chi}=6$ γ) $4^{\eta\mu\,\chi}+4^{\sigma\upsilon\nu\chi}=5$

δ) $3^{\eta\mu\chi}+27\cdot 3^{-\eta\mu\chi}=12$ ε) $e^{\sigma\upsilon\nu\chi}+e^{-\sigma\upsilon\nu\chi}=2$

**21.** Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $7^{x-5}<1$ ε) $3^{\frac{x-2}{x+2}}>1$

β) $4^{x+x+5}<1$ ζ) $5^{x}-5^{x+7}>5^{2x-3}$

γ) $3^{5x+2}>\frac{1}{27}$ η) $7\cdot 5^{x}>25^{x}+6$

δ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{7-x}>32$ θ) $16^{x}-17\cdot 4^{x}+16>0$

**22.** Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $4^{x}-9\cdot 2^{x}+8<0$

ii) $9^{x}-4\cdot 3^{x}+3>0$

iii) $e^{2x}+e^{x}-2>0$

**23.**Να λύσετε τις ανισώσεις:

$i)5^{x^2-7}\cdot 5^{4x-5}>1$

$ii)2^x+2^{3-x}\geq 9$

$iii)3^{x+1}+\dfrac{1}{3^x}\leq 4$

$iv)9\cdot 3^{x^2-2x-8}<27^x$

**24.**Δίνεται η εξίσωση: $f(x)=3\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{2}$

Α)Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f.

Β)Να δείξετε ότι $10^x+10^{-x}+1\geq f(0)$

Γ)Να λύσετε την εξίσωση $10^x+10^{-x}+1=f(0)$

**25.** Να λύσετε την ανίσωση : $3\cdot 8^x-3\cdot 12^x+2\cdot 18^x>2\cdot 27^x$

**26.** Να λύσετε την ανίσωση : $4^{\eta\mu^2 x}+4^{\sigma\upsilon\nu 2x}<5$.

**27.**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x+x^3$

Α)Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

Β)να λύσετε την ανίσωση: $2^{x^2-2}-2^{1-2x}<(1-2x)^3-\left(x^2-2\right)^2$

**28.** Να λυθούν τα συστήματα :

α) $\left.\begin{matrix}3^x+5^y=14\\ 9^x-25^y=56\end{matrix}\right\}$ β) $\left.\begin{matrix}2^x-3^y=7\\ 4^x-9^y=175\end{matrix}\right\}$

γ) $\left.\begin{matrix}4^x\,2^{y-2}=32\\ 3^{x+2}\,3^{y-4}=27\end{matrix}\right\}$ δ) $\left.\begin{matrix}2^x\,3^y=54\\ 3^x\,2^y=24\end{matrix}\right\}$

ε) $\left.\begin{matrix}3^x-2^{y+3}=15\\ 2^y-3^{x-3}=3\end{matrix}\right\}$ ζ) $\left.\begin{matrix}4^{x-1}\,2^{y-2}=8\\ 3^{x-2}\,3^{y-4}=\dfrac{1}{3}\end{matrix}\right\}$

**29.**Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\left.\begin{matrix}4^x\,8^y=256\\ 64\cdot 4^x-8^y=0\end{matrix}\right\}$ β) $\left.\begin{matrix}5^x-4^{y+1}=9\\ 5^{x-1}+4=69\end{matrix}\right\}$

γ) $\left.\begin{matrix}2^x=8^{y+1}\\ 9^y=3^{x-9}\dfrac{5^{2x}}{5^{7y}}=\dfrac{1}{5^{17}}\end{matrix}\right\}$

**30**. Να λυθούν τα συστήματα:

*i*) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648 \\ 3^x \cdot 4^y = 432 \end{cases}$

*iii*) $\begin{cases} 3^x - 3^y = -18 \\ y - x = 1 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} 2^x - 3^y = 1 \\ 4^x - 9^y = 7 \end{cases}$

*v*) $\begin{cases} 3^{x+2} + 3^y = 28 \\ 8^{x-y} \cdot 4^{2y-x} = 2 \end{cases}$ vi) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 13 \\ 4^x - 25^y = 39 \end{cases}$

**31.**Να λύσετε τα συστήματα:

*i*) $\begin{cases} 3^{x-1} \cdot 9^y = 1 \\ 2^x \cdot 2^{y-1} = 4 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 5^{x^2-7x+10} = \dfrac{1}{25} \\ x + y = 8 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 3^x - 5^y = 4 \\ 9 \cdot 3^{-x} + 5^y = 6 \end{cases}$

**32.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Δείξτε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

**33.** Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 8 χρόνια , δείξτε ότι η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση είναι:$Q(t)=Q_0\, 2^{-\frac{t}{8}}$.

**Π.34.** Δίνεται η $f(x) = \dfrac{\ln(2x-1)}{\ln(x-2)}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
ii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2$

**Π.35.** Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \left(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\alpha - 1\right)^{2-\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\eta\mu^2 \frac{x}{2}}$

i) Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα
ii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1$ αν $0 < \alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\alpha - 1 \neq 1$

# ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

**1**.Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3^x$ με $x\in\Re$ .

Α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων : $g(x)=3^x+1$ και $h(x)=3^x-1$ μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Β)Ποια είναι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g και ποια της γραφικής παράστασης της h;

**2**.α) Δίνεται η συνάρτηση $a^x:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με $a^{38}<a^{24}$ ,$\alpha\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)=a^x$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Β)Να λύσετε την ανίσωση $2^{x-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$

**3**.Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=a\cdot 2^x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1,3) και Β(2,13)

Α)Να αποδείξετε ότι α=5 και β=-7

Β)Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y'y

Γ)να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$

Δ)να λύσετε την ανίσωση $f\left(2^x-31\right)<3$

# ***ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ***

Γενικά η λύση της εξίσωσης :

$$\alpha^x = \theta \qquad (1)$$

όπου $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$ είναι μοναδική, αφού η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ είναι γνησίως μονότονη και το θ ανήκει στο σύνολο τιμών της.

Την μοναδική λύση της (1), ονομάζουμε **λογάριθμο του θ ως προς βάση α** και τη συμβολίζουμε :

$$\boxed{x = \log_\alpha \theta}$$

Δηλαδή όταν είναι $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, ισχύει η ισοδυναμία :

$$\boxed{\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να διατυπώσουμε ότι :

**Ο λογάριθμος με βάση α του θ $\log_\alpha \theta$ , είναι ο εκθέτης x στον οποίο πρέπει να υψώσουμε το α, για να πάρουμε το θ.**

**<u>Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα :</u>**

- $\log_3 9 = 2$ διότι $3^2 = 9$
- $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ διότι $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$
- $\log_{10} 0,0001 = -4$ διότι $10^{-4} = 0,0001$

- $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$ διότι $\sqrt{3}^4 = 3^2 = 9$

Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\theta > 0$, έχουμε:

$\boxed{\log_\alpha \alpha^x = x}$ και $\boxed{\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta}$

**Μη ξεχνάτε:** $\alpha^x = \theta$

Ακόμη επειδή $\alpha^0 = 1$ και $\alpha^1 = \alpha$, ισχύουν :

$\boxed{\log_\alpha 1 = 0}$ και $\boxed{\log_\alpha \alpha = 1}$

## ■ Ιδιότητες των λογαρίθμων.

Για $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και για κάθε $k \in \mathbb{R}$, ισχύουν:

**1.** $\boxed{\log_\alpha (\theta_1 \cdot \theta_1) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2}$

Απόδειξη:

Έστω ότι είναι :

$$\log_\alpha \theta_1 = x \text{ και } \log_\alpha \theta_2 = y \quad (1)$$

από τις οποίες προκύπτουν :

$$\alpha^x = \theta_1 \text{ και } \alpha^y = \theta_2$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές κατά μέλη, έχουμε:

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \theta_1 \cdot \theta_2 \Rightarrow \alpha^{x+y} = \theta_1 \cdot \theta_2$$

Από την παραπάνω σχέση, σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου, έχουμε :

$$\log_\alpha (\theta_1 \cdot \theta_2) = x + y$$

από την οποία λόγω των ισοτήτων (1), προκύπτει:

$\boxed{\log_\alpha (\theta_1 \cdot \theta_1) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2}$

**2.** $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log \theta_2$

Η απόδειξη γίνεται όπως και στην προηγούμενη ιδιότητα, με συνέπεια να έχουμε:

$$\boxed{\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log \theta_2}$$

3. $\log_\alpha \theta^k = k \log_\alpha \theta$

Απόδειξη:

Έστω ότι :

$$\log_\alpha \theta = x \quad (2)$$

Αυτό σημαίνει:

$$\alpha^x = \theta \Rightarrow \alpha^{kx} = \theta^k$$

Σύμφωνα με τον ορισμό, έχουμε:

$$\log_\alpha \theta^k = kx$$

με συνέπεια από την (2), να προκύπτει:

$$\boxed{\log_\alpha \theta^k = k \log_\alpha \theta}$$

■ **Δεκαδικοί λογάριθμοι.**

Όταν η βάση του λογαρίθμου ενός θετικού αριθμού θ είναι το 10, τότε λέμε ότι έχουμε τον δεκαδικό λογάριθμο του θ ή απλά τον λογάριθμο του θ και συμβολίζουμε:

$$\log \theta$$

Φυσικά ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boxed{\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta}$$

**Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα:**

- $\log 1000 = 3$ διότι $10^3 = 1000$
- $\log 0,0001 = -4$ διότι $10^{-4} = 0,0001$

■ **Φυσικοί λογάριθμοι**

Είναι γνωστός ο αριθμός e και η χρησιμότητα του στην περιγραφή διαφόρων φαινομένων. Εξίσου χρήσιμοι είναι και οι λογάριθμοι με βάση τον e, που ονομάζονται φυσικοί ή νεπέριοι λογάριθμοι και για κάθε θετικό αριθμό θ, συμβολίζονται $\ln\theta$. Δηλαδή έχουμε:

$$\boxed{\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta}$$

## ■ Λογαριθμική συνάρτηση

Θεωρούμε τον $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ορίζεται ο $\log_\alpha x$. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε $x \in (0,+\infty)$ αντιστοιχίζεται ο αριθμός $\log_\alpha x$, επομένως έχουμε τη συνάρτηση :

$$f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$$

με τύπο:

$$\boxed{f(x) = \log_\alpha x}$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση το α.**

Επειδή ισχύει η ισοδυναμία :

$$\boxed{\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x} \quad (1)$$

□ Αν είναι $\alpha > 1$ για τη συνάρτηση $y = \log_\alpha x$ έχουμε να παρατηρήσουμε ότι:

▫ Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα : $A = (0,+\infty)$

▫ Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

▫ Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A = (1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα του $y'y$.

▫ Είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή ισχύει:

αν $x_1 < x_2$ τότε ισχύει $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2$

Όπως εμφανίζεται και στο σχήμα που ακολουθεί, είναι

$$\log_\alpha x < 0 \text{ αν } 0 < x < 1$$

και

$$\log_\alpha x > 0 \text{ αν } x > 1$$

□ Αν είναι $0 < \alpha < 1$ τότε για τη συνάρτηση $y = \log_\alpha x$, έχουμε να παρατηρήσουμε ότι:

▫ Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα : $A = (0, +\infty)$

▫ Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

▫ Έχει γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A = (1, 0)$ και έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα του $y'y$.

▫ Είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή ισχύει: αν $x_1 < x_2$, τότε είναι $\log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2$.

Όπως εμφανίζεται και στο σχήμα, έχουμε:

$$\log_\alpha x > 0 \text{ αν } 0 < x < 1$$

και

$$\log_\alpha x < 0 \text{ αν } x > 1$$

Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, ισχύει:

αν $x_1 \neq x_2$, τότε είναι και $\log_\alpha x_1 \neq \log_\alpha x_2$

Από την συνεπαγωγή αυτή με την απαγωγή σε άτοπο, καταλήγουμε στην ισοδυναμία:

$$\boxed{x = y \Leftrightarrow \log_\alpha x = \log_\alpha y}$$

# ***ΑΣΚΗΣΕΙΣ***

**1.** Να αποδείξετε ότι :

i) $\log 4+\log 20-3\log 2=1$

ii) $\frac{1}{2}\ln 4+\frac{2}{3}\ln 27-\ln 6=\ln 3$

**ΛΥΣΗ**

i) $\log 4+\log 20-3\log 2=\log\ (4\cdot 20\ )-\log 2^3=\log 80-\log 8=\log\frac{80}{8}=\log 10=1$

ii) $\frac{1}{2}\ln 4+\frac{2}{3}\ln 27-\ln 6=\ln 4^{\frac{1}{2}}+\ln 27^{\frac{2}{3}}-\ln 6=\ln\sqrt{4}+\ln\sqrt[3]{27^2}-\ln 6=$

$\ln 2+\ln\sqrt[3]{3^6}-\ln 6=\ln 2+\ln 3^2-\ln 6=\ln 2+\ln 9-\ln 6=$

$\ln\ (2\cdot 9\ )-\ln 6=\ln 18-\ln 6=\ln\frac{18}{6}=\ln 3$

**2.** Έστω η συνάρτηση $f\ x\ =\ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

**ΛΥΣΗ**

i) Πρέπει $\frac{5-x}{5+x}>0\Leftrightarrow\ 5-x\ \ 5+x\ >0\Leftrightarrow -5<x<5$

Άρα $A=\ -5,5$

ii) Για κάθε $x\in A$ είναι

α) $-x\in A$

β) $f(-x)=\ln\frac{5-(-x)}{5+(-x)}=\ln\frac{5+x}{5-x}=\ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{5-x}{5+x}=-f(x)$ .

Άρα η $f(x)$ είναι περιττή.

**3.** Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $\log(1+x)=\log(1-x)$

ii) $\log(1+x)=1+\log(1-x)$

iii) $2\log(2x-1)-\log(3x-2x^2)=\log(4x-3)-\log x$

iv) $\ln\frac{x}{2}=\frac{\ln x}{2}$

**ΛΥΣΗ**

i) Πρέπει: $\begin{cases}x+1>0\Leftrightarrow x>-1\\1-x>0\Leftrightarrow x<1\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-1,1)$ (1). Η δοσμένη σχέση γράφεται :

$\log(1+x)=\log(1-x)\overset{\log:1-1}{\Leftrightarrow}1+x=1-x\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$ (δεκτή).

ii) Πρέπει: $\begin{cases}x+1>0\Leftrightarrow x>-1\\1-x>0\Leftrightarrow x<1\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-1,1)$ (1). Η δοσμένη σχέση γράφεται :

$\log(1+x)=1+\log(1-x)\Leftrightarrow\log(1+x)=\log 10+\log(1-x)\Leftrightarrow$

$\log(1+x)=\log\left[10(1-x)\right]\overset{\log:1-1}{\Leftrightarrow}1+x=10(1-x)\Leftrightarrow 1+x=10-10x\Leftrightarrow$

$11x=9\Leftrightarrow x=\frac{9}{11}$ (δεκτή).

iii) Πρέπει: $\begin{cases}2x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}\\3x-x^2>0\Leftrightarrow x(3-2x)>0\Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)\\x>0\\4x-3>0\Leftrightarrow x>\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$ (1).

Η δοσμένη σχέση γράφεται :

$2\log(2x-1)-\log(3x-2x^2)=\log(4x-3)-\log x\Leftrightarrow\log\frac{(2x-1)^2}{3x-2x^2}=\log\frac{4x-3}{x}\Leftrightarrow$

$$\frac{2x-1^{\,2}}{x\ \ 3-2x}=\frac{4x-3}{x}\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}\ 2x-1^{\,2}=\ 4x-3\ \ 3-2x\ \Leftrightarrow \ldots.\Leftrightarrow 6x^2-11x+5=0\quad (1)$$

Οι ρίζες της (1) είναι : $x=1$ (δεκτή) ή $x=\frac{5}{6}$ (δεκτή).

iv) Πρέπει να είναι: $\frac{x}{2}>0\Leftrightarrow x>0$, και η δοσμένη γράφεται:

$$\ln\frac{x}{2}=\frac{\ln x}{2}\Leftrightarrow 2\ln\frac{x}{2}=\ln x\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right)^2=\ln x\Leftrightarrow\left(\frac{x}{2}\right)^2=x\Leftrightarrow x^2=4x\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\ (\text{απορρίπτεται})\\ x=4\ (\text{δεκτή})\end{cases}$$

**4.** Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $x\ \log 10-\log 5\ =\log\ 4^x-12$ ii) $\log_2\ 4^x+4\ =x+\log_2\ 2^{x+1}-3$

iii) $\frac{\log_2\ 9-2^x}{3-x}=1$

**ΛΥΣΗ**

i) Πρέπει:

$$4^x-12>0\Leftrightarrow 4^x>12\Leftrightarrow \log 4^x>\log 12\Leftrightarrow x\log 4>\log 12\overset{\log 4>0}{\Leftrightarrow} x>\frac{\log 12}{\log 4}\Leftrightarrow x>\log_4 12$$

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$x\ \log 10-\log 5\ =\log\ 4^x-12\ \Leftrightarrow x\log\frac{10}{5}=\log\ 4^x-12\ \Leftrightarrow\log\left(\frac{10}{5}\right)^x=\log\left[\ 2^{x\ \ 2}-12\right]$$

$$2^x=\ 2^{x\ \ 2}-12\Leftrightarrow\ 2^{x\ \ 2}-2^x-12=0\overset{2^x=\alpha}{\Leftrightarrow}\alpha^2-\alpha-12=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha=\frac{1+7}{2}=\frac{8}{2}=4\ \text{άρα}\ 2^x=4\Rightarrow 2^x=2^2\Rightarrow x=2\ (\text{δεκτή})^*\\ \alpha=\frac{1-7}{2}=\frac{-6}{2}=-3\ \text{άρα}\ 2^x=-3\ (\text{άτοπο})\end{cases}$$

(*) Είναι : $\log_4 16>\log_4 12\Rightarrow 2>\log_4 12$

ii) Πρέπει:

$$2^{x+1}-3>0\Leftrightarrow 2\cdot 2^x>3\Leftrightarrow 2^x>\frac{3}{2}\Leftrightarrow\log 2^x>\log\frac{3}{2}\Leftrightarrow x\log 2>\log\frac{3}{2}\overset{\log 2>0}{\Leftrightarrow}$$

$$x>\frac{\log\frac{3}{2}}{\log 2}\Leftrightarrow x>\log_2\frac{3}{2}\quad (1)$$

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται :

$$\log_2 4^x+4=x+\log_2 2^{x+1}-3 \Leftrightarrow \log_2 4^x+4=\log_2 2^x+\log_2 2^{x+1}-3 \Leftrightarrow$$

$$\log_2 4^x+4=\log_2\left[2^x\ 2^{x+1}-3\right] \Leftrightarrow 4^x+4=2^x\ 2^{x+1}-3 \Leftrightarrow 4^x+4=2\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x \Leftrightarrow$$

$$2^{x\ 2}+4=2\cdot 2^{x\ 2}-3\cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{x\ 2}-3\cdot 2^x-4=0 \overset{2^x=\alpha}{\Leftrightarrow} \alpha^2-3\alpha-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{3+5}{2}=\dfrac{8}{2}=4 \text{ άρα } 2^x=4\Rightarrow 2^x=2^2\Rightarrow x=2 \text{ (δεκτή)}^*\\ \alpha=\dfrac{3-5}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \text{ άρα } 2^x=-1 \text{ (άτοπο)}\end{cases}$$

(*) Είναι : $\log_2 16>\log_2\dfrac{3}{2}\Rightarrow 2>\log_2\dfrac{3}{2}$

**5.** Δίνονται οι συναρτήσεις : $f\ x=\ln\ e^{2x}-2e^x+3$ και $g\ x=\ln 3+\ln\ e^x-1$

i) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $f\ x=g\ x$

iii) Να λύσετε την ανίσωση : $f\ x>2g\ x$

**(ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2003)**

## ΛΥΣΗ

i) ▪ Η συνάρτηση $f\ x=\ln\ e^{2x}-2e^x+3$ ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$e^{2x}-2e^x+3>0 \Leftrightarrow e^{x\ 2}-2e^x+3>0$$

Θέτοντας $e^x=y>0$, η προηγούμενη ανίσωση γράφεται :

$$y^2-2y+3>0 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι :

$$\Delta=-2^{\ 2}-4\cdot 3=4-12=-8<0$$

Επομένως η (1) ισχύει και κάθε $y\in\mathbb{R}$ . Άρα και η ανίσωση :

$$e^{2x}-2e^x+3>0$$

ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι :

$$\boxed{A_1=\mathbb{R}}$$

▪ Η συνάρτηση $g\ x\ =\ln 3+\ln\ e^{x}-1$ ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

$$e^{x}-1>0\Leftrightarrow e^{x}>1\Leftrightarrow e^{x}>e^{0}$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση $e^{x}$ είναι γνησίως αύξουσα, προκύπτει:

$$x>0$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g, είναι :

$$A_2=\ 0,+\infty$$

ii) Από τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f,g προκύπτει ότι οι ρίζες της εξίσωσης :

$$f\ x\ =g\ x\quad (1)$$

πρέπει να περιέχονται στο $A_2=\ 0,+\infty$ , αφού πρέπει να έχουν νόημα και οι δύο συναρτήσεις. Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι ισοδυναμίες :

$$f\ x\ =g\ x\ \Leftrightarrow \ln\ e^{2x}-2e^{x}+3\ =\ln 3+\ln\ e^{x}-1\ \Leftrightarrow$$

$$\ln\ e^{2x}-2e^{x}+3\ =\ln\left[3\ e^{x}-1\ \right]\Leftrightarrow e^{2x}-2e^{x}+3=3e^{x}-3\Leftrightarrow$$

$$e^{2x}-5e^{x}+6=0\Leftrightarrow\ e^{x}\ ^{2}-5e^{x}+6=0$$

Θέτοντας $e^{x}=\omega>0$, προκειμένου να λύσουμε την προηγούμενη, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση :

$$\omega^{2}-5\omega+6=0$$

της οποίας οι ρίζες είναι :

$$\omega_1=2\ \text{ή}\ \omega_2=3$$

Επομένως οι ρίζες της (1), είναι :

▪ Για $\omega=2\Rightarrow e^{x}=2\Leftrightarrow x=\ln 2$

▪ Για $\omega=3\Rightarrow e^{x}=3\Leftrightarrow x=\ln 3$

iii) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$f\ x\ >2g\ x\ \Leftrightarrow \ln\ e^{2x}-2e^{x}+3\ >2\cdot\ln\left[3\ e^{x}-1\ \right]\Leftrightarrow$$

$$\ln\ e^{2x}-2e^{x}+3\ >\ln\ 3e^{x}-3\ ^{2}\Leftrightarrow e^{2x}-2e^{x}+3>\ 3e^{x}-3\ ^{2}\Leftrightarrow$$

Η $e^{x}$ είναι γνησίως αύξουσα.

$$e^{2x}-2e^{x}+3>9e^{2x}+9-18e^{x}\Leftrightarrow$$
$$8e^{2x}-16e^{x}+6<0\Leftrightarrow e^{2x}-2e^{x}+\frac{3}{4}<0$$

Θέτοντας $e^{x}=\omega>0$, έχουμε την ανίσωση :

$$\omega^{2}-2\omega+\frac{3}{4}<0 \quad (2)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\omega^{2}-2\omega+\frac{3}{4}$ είναι :

$$\Delta=\ -2\ ^{2}-4\cdot\frac{3}{4}=4-3=1$$

Επομένως έχει τις ρίζες:

$$\omega_{1,2}=\frac{2\pm1}{2}=\begin{cases}\omega_1=\frac{3}{2}\\ \omega_2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Άρα οι λύσεις της (2), είναι :

$$\boxed{\frac{1}{2}<\omega<\frac{3}{2}}$$

Συνεπώς οι τιμές του x που ικανοποιούν την ανίσωση $f\ x\ >2g\ x\ $ είναι :

$$\frac{1}{2}<e^{x}<\frac{3}{2}\Leftrightarrow\ln\frac{1}{2}<x<\ln\frac{3}{2}\Leftrightarrow-\ln2<x<\ln\frac{3}{2}$$

Η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα

Επειδή πρέπει $x>0$, συνεπάγεται ότι οι λύσεις της ανίσωσης :
$f\ x\ >2g\ x\ $ είναι :

$$\boxed{0<x<\ln\frac{3}{2}}$$

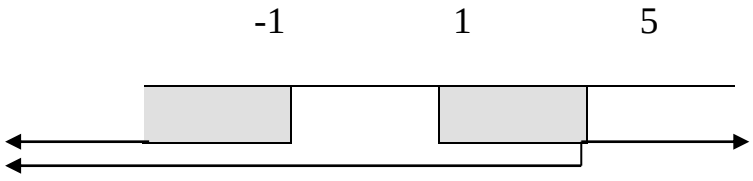
**6.** Να λυθεί η ανίσωση: $\log\ x^{2}-1\ >\log\ 5-x\ $ (1).

**ΛΥΣΗ**

Οι ρίζες της ανίσωσης (1), πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες :

$$\left.\begin{array}{l} x^2-1>0 \\ 5-x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x^2>1 \\ x<5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} |x|>1 \\ x<5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x>1 \text{ ή } x<-1 \\ x<5 \end{array}\right\}$$

Για τον προσδιορισμό των λύσεων του παραπάνω συστήματος, μας βοηθά η ευθεία των πραγματικών αριθμών:



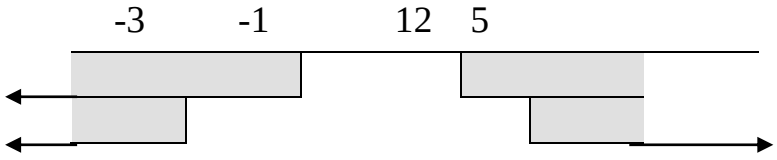

Άρα οι λύσεις του παραπάνω συστήματος, επομένως και οι τιμές του x που μπορούν να ικανοποιούν την (1), είναι :

$$\boxed{x<-1 \text{ ή } 1<x<5} \quad (2)$$

Η βάση του λογάριθμου είναι $10>1$, άρα η λογαριθμική συνάρτηση είναι αύξουσα, με συνέπεια ισοδύναμα της (1) να έχουμε :

$$x^2-1>5-x \Leftrightarrow x^2+x-6>0 \Leftrightarrow$$
$$x<-3 \text{ ή } x>2$$

Από τις λύσεις αυτές θα κάνουμε δεκτές εκείνες που ικανοποιούν και τις συνθήκες (2). Η επιλογή θα γίνει και πάλι με την βοήθεια των πραγματικών αριθμών:




Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι : $\boxed{x<-3 \text{ ή } 2<x<5}$

**7.**i) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{3}}$
ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x}-2\cdot 3^{\log x}-100^{\log\sqrt{3}}=0$

**ΛΥΣΗ**

i) Έχουμε: $100^{\log\sqrt{3}} = 10^{2^{\log\sqrt{3}}} = 10^{2\log\sqrt{3}} = 10^{\log\sqrt{3}^2} = 10^{\log 3} = 3$

ii) Πρέπει $x > 0$, οπότε η δοσμένη σχέση γράφεται:

$3^{2\log x} - 2\cdot 3^{\log x} - 100^{\log\sqrt{3}} = 0 \overset{i)}{\Rightarrow} 3^{2\log x} - 2\cdot 3^{\log x} - 3 = 0 \Rightarrow 3^{\log x^2} - 2\cdot 3^{\log x} - 3 = 0$ (1)

Θέτουμε στην σχέση (1) $3^{\log x} = t$, οπότε η επιλύουσα της (1) είναι :

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \quad (2)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου της σχέσης (2) είναι : $\Delta = 4 + 4\cdot 3 = 16$ και οι ρίζες είναι : $t = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$ (Η τιμή $t = -1$ απορρίπτεται δίοτι $t > 0$)

Έτσι είναι : $t = 3 \Rightarrow 3^{\log x} = 3^1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10^1 \Rightarrow x = 10$.

**8.** Να λύσετε την εξίσωση : $x+1^{\log(x+1)} = 100(x+1)$ .

**ΛΥΣΗ**

Πρέπει $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

Θέτουμε $x + 1 = t$, οπότε η επιλύουσα της δοσμένης εξίσωσης είναι :

$$t^{\log t} = 100t \Leftrightarrow \log_t 100t = \log t \Leftrightarrow \log_t 100 + \log_t t = \log t \Leftrightarrow \frac{\log 100}{\log t} + 1 = \log t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\log t} + 1 = \log t \Leftrightarrow \log t^2 - \log t - 2 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $\log t = \omega$, οπότε η επιλύουσα της (1) είναι η : $\omega^2 - \omega - 2 = 0$ (2)

Το τριώνυμο της σχέσης (2) έχει διακρίνουσα : $\Delta = 1 + 4\cdot 2 = 1 + 8 = 9$ και ρίζες:

$\omega = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$, οπότε έχουμε τις λύσεις :

▪ Αν $\omega = 2 \Rightarrow \log t = 2 \Rightarrow t = 10^2 \Rightarrow x + 1 = 100 \Rightarrow x = 99$ (δεκτή)

▪ Αν $\omega=-1\Rightarrow \log t=-1\Rightarrow t=10^{-1}\Rightarrow t=\frac{1}{10}\Rightarrow x+1=\frac{1}{10}\Rightarrow x=-\frac{9}{10}$ (δεκτή)

**10.** Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε να ισχύει:

$$\log x+\log x^3+\log x^5+.....+\log x^{2\nu-1}=2\nu^2$$

**ΛΥΣΗ**

Είναι : $\log x+\log x^3+\log x^5+.....+\log x^{2\nu-1}=2\nu^2\Rightarrow$

$$\log\ x\cdot x^3\cdot x^5\cdot\cdots x^{2\nu-1}\ =2\nu^2\Rightarrow\ x\cdot x^3\cdot x^5\cdot\cdots x^{2\nu-1}\ =10^{2\nu^2}\Rightarrow$$

$$x^{1+3+5+....\ 2\nu-1}=10^{2\nu^2}\Rightarrow x^{\nu^2}=\ 10^{2\ \nu^2}\Rightarrow x=100$$

**<u>Σημείωση</u>**

Υπολογισμός του αθροίσματος : $1+3+5+....+\ 2\nu-1$ (1)

Αν ο όρος $2\nu-1$ κατέχει την κ – τάξη, τότε:

$\alpha_\kappa=\alpha_1+\ \kappa-1\ \cdot\omega\Rightarrow 2\nu-1=1+\ \kappa-1\ \cdot 2\Rightarrow 2\nu-1=1+2\kappa-2\Rightarrow 2\nu=2\kappa\Rightarrow\nu=\kappa$

Δηλαδή το πλήθος των όρων στο άθροισμα (1) είναι ν.

Άρα : $1+3+5+...+\ 2\nu-1\ =\frac{1+\ 2\nu-1}{2}\cdot\nu=\nu\cdot\nu=\nu^2$.

**10.**i) Να αποδείξετε ότι $x^{\log y}=y^{\log x}$ με $x,y>0$.

ii) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases}x^{\log y}+y^{\log x}=20\\ \log\sqrt{x\cdot y}=1\end{cases}$

iii) Αν οι λύσεις του ii) είναι ρίζες της εξίσωσης:

$\log\left[\log\ x^2+x\log\theta-110\ \right]=0$ να βρείτε το $\theta\in\mathbb{R}_+^*$.

**ΛΥΣΗ**

i) **1ος Τρόπος**

Έστω ότι : $x^{\log y}=y^{\log x}\Leftrightarrow\log\ x^{\log y}\ =\log\ y^{\log x}\ \Leftrightarrow\log y\cdot\log x=\log x\cdot\log y$

(αληθής).

**2ος Τρόπος**

Είναι : $x^{\log y}=y^{\log_y x^{\log y}}=y^{\log y\cdot\log_y x}=y^{\log y\cdot\frac{\log x}{\log y}}=y^{\log x}$.

**3ος Τρόπος**

Έστω ότι : $\begin{cases}\log x=t\Leftrightarrow 10^t=x\ (1)\\ \log y=\alpha\Leftrightarrow 10^\alpha=y\ (2)\end{cases}$ Τότε: $\left.\begin{array}{l}x^{\log y}\overset{(1)}{=}10^{t\ \alpha}=10^{\alpha t}\\ y^{\log x}\overset{(2)}{=}10^{\alpha\ t}=10^{\alpha t}\end{array}\right\}\Leftrightarrow x^{\log y}=y^{\log x}$

ii) Πρέπει $x>0$ και $y>0$

$$\left.\begin{array}{l}x^{\log y}+y^{\log x}=20\\ \log\sqrt{x\cdot y}=1\end{array}\right\}\overset{i)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}2\cdot x^{\log y}=20\\ \log\sqrt{x\cdot y}=\log 10\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x^{\log y}=10\\ \sqrt{x\cdot y}=10\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^{\log y}=10\ (1)\\ x\cdot y=100\ (2)\end{array}\right\}$$

Η σχέση (1) γράφεται :

$$x^{\log y}=10\overset{(2)}{\Leftrightarrow}x^{\log\frac{100}{x}}=10\Leftrightarrow x^{\log 100-\log x}=10\Leftrightarrow x^{2-\log x}=10\Leftrightarrow\log\ x^{2-\log x}=\log 10\Leftrightarrow$$

$$2-\log x\ \cdot\log x=1\Leftrightarrow 2\log x-\ \log x\ ^2=1\Leftrightarrow\ \log x-1\ ^2=0\Leftrightarrow\log x-1=0\Leftrightarrow$$

$$\log x=1\Leftrightarrow x=10$$

Η σχέση (2) για $x=10$ δίνει : $y=10$.

Άρα $x,y\ =\ 10,10$ .

iii) Για $x=10$ η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$\log\left[\log\ 100+10\log\theta-110\ \right]=0\Leftrightarrow\log\left[\log\ 100+10\log\theta-110\ \right]=\log 1\Leftrightarrow$$

$$\log\ 100+10\log\theta-110\ =1\Leftrightarrow\log\ 100+10\log\theta-110\ =\log 10\Leftrightarrow$$

$$100+10\log\theta-110=10\Leftrightarrow 10\log\theta=20\Leftrightarrow\log\theta=2\Leftrightarrow\theta=10^2\Leftrightarrow\theta=100$$

# ***ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ***

1.Αν $0 < a \neq 1$ και θ>0 ισχύει η ισοδυναμία
$\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta$ Σ Λ

2.Αν $0 < a \neq 1$ ισχύει ότι: $\log_a a^x = a$ Σ Λ

3.Αν $0 < a \neq 1$ ισχύει ότι: $a^{\log_a \theta} = \theta$ Σ Λ

4.Αν $0 < a \neq 1$ ισχύει ότι: $\log_a 1 = 1$ Σ Λ

5.Αν $0 < a \neq 1$ ισχύει ότι: $\log_a a = 1$ Σ Λ

6.Ισχύει ότι

i) $\log x > \ln e$ για κάθε χ>0 Σ Λ

ii) $\log x^{-2} < \ln e^{-2}$ για κάθε χ>0 Σ Λ

iii) $\log 10^2 = 2$ Σ Λ

iv) $\log e^3 = 3$ Σ Λ

v) $\log \frac{10}{e} = 1 - \log e$ Σ Λ

7.Αν x<yτότε logx<logy Σ Λ

8.Αν x<yτότε lnx>lny Σ Λ

9.Αν x<yτότε $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} y$ Σ Λ

10.Αν x<y τότε $\log_3 x > \log_3 y$ Σ Λ

# ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δείξτε ότι:

α) 2log 2+3log3-log12=2log3

β) $\frac{1}{2}\log 16+\frac{1}{3}\log 8+\frac{1}{4}\log 81=3\log 2+\log 3$

**2.** Να αποδείξετε ότι :

*i*) $\log_3\frac{28}{17}+\log_3\frac{34}{27}-\log_3\frac{56}{9}=-1$

*ii*) $3\log 2+2\log 6-2\log 3-5\log 2=0$

*iii*) $\frac{2\log 40-\log 20-1}{2-\log 50}=3$

**3.**Να αποδείξετε ότι:

*i*) $10^{1-\log 2}=5$

*ii*) $4^{\frac{1}{2}+\log_4 3}=6$

*iii*) $5^{2+\log_5 4}=100$

*iii*) $\frac{\ln\sqrt[3]{9}+\ln\sqrt[3]{4}-\ln\sqrt[3]{25}}{\ln 6-\ln 5}=\frac{2}{3}$

*iv*) $27^{\log_3 18-2}=8$

**4.**Δείξτε ότι: log2+log($\sqrt{3}$+1)+log(1+$\sqrt{2-\sqrt{3}}$)+log(1-$\sqrt{2-\sqrt{3}}$)=2log2

**5**.Δείξτε ότι:

*i*) $\log 2+\log\left(2+\sqrt{2}\right)+\log\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\log\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)=2\log 2$

*ii*) $\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+\ln\left(2+\sqrt{6+\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\sqrt{6+\sqrt{3}}-2\right)=0$

*iii*) $2\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)+\log_7\left(11+6\sqrt{2}\right)=2$

**6.** Δείξτε ότι:

α) log200=3log2+2log5

β) $\frac{\log\sqrt{125}+\log\sqrt{27}-\log\sqrt{8}}{\log 15-\log 2}=\frac{3}{2}$

**7.** Δείξτε ότι οι αριθμοί α, $\frac{a}{\beta}$ ,β με α,β>0 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου όταν και μόνο όταν οι αριθμοί $\log\alpha$ , $\log\frac{a}{\beta}$ ,$\log\beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

**8.** Να προσδιορίσετε την εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ και την λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha\chi$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις περνούν από το σημείο

α) (2,9) β) (-4, $\frac{1}{16}$ ) γ)( $\frac{1}{27}$ ,-3) δ) (-5,-6)

**9.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\ln(3x-2)$ β) $f(x)=\log(x^2-1)$ γ) $f(x)=\ln\frac{x-3}{5-x}$

δ) $f(x)=\ln(2^x-8)$ ε) $f(x)=\ln(e^x-1)$ στ) $f(x)=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$

**10.**Να λυθούν οι εξισώσεις:

*i*) $\log(x-100)=1$ ii)$\ln x+\frac{1}{2}\ln 16=\ln(x+1)$

*iii*) $\log x+\log(x-3)=1$ iv) $\frac{1}{2}\ln(x+1)+\ln\sqrt{x+4}=\frac{\ln 10}{2}$

*v*) $\log(4x)-2\log(x-3)=\log 4-\log x$

**11.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log(x^2-x)=\log(x+15)$ β) $\log(x^2+1)-\log(x+2)=\log 2$

γ) $\log(x-1)+\log(x-2)=\log x$ δ) $\frac{1}{2}\log x-\log 4=\log(x+1)-1$

**12.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{1}{2}\log(x+24)=1-\log\sqrt{x+3}$ β) $\log(x^2+6)-\log x=\log 5$

γ) $\frac{1}{3}\log(x-1)=\log x-\log 2$ δ) $\log 9+2\log x=\log 12+\log 3$

ε) $\ln x+\ln(x+5)=\ln 50$

**13.**Να λύσετε τις εξισώσεις:

$\alpha)\ln\left(x^2\right)+3\ln x=5$

$\beta)2\ln\left(x-4\right)=\ln x-2\ln 2$

$\gamma)\ln\left(\frac{1}{x}\right)=1-\ln x$

$\delta)\ln\sqrt{x}+\ln x=\ln 5+\ln x^2$

$\varepsilon)\ln^2 x-\ln\left(\frac{1}{x}\right)=0$

**14.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{1}{2}$ log(x+1)=1-log$\sqrt{5x}$

β) $\frac{1}{2}$log(x+2)+log$\sqrt{x-3}$=1+log$\sqrt{3}$

**15.** Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\ln\ 1-x\ =\ln\ 1+x$ β) $\ln\ x+1\ +\ln\ x-2\ =\ln 4$

γ) $\log\ 1+x\ =1+\log\ 1-x$ δ) $\log\ x-9\ +2\log\sqrt{2x-1}=2$

ε) $\frac{1}{2}\log\ x+2\ +\log\sqrt{x-3}=1+\log\sqrt{3}$

**16.** Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $3\log x-2=0$ β) $2\log^2 x-3\log x=0$

γ) $4\ln^2 x-1=0$ δ) $2\log^2 x+5\log x-3=0$

**17.**Να συγκριθούν οι αριθμοί:

α) log(1-4x) και 2log(x-2) β) log(x+$\frac{1}{x}$) και log2.

**18.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2^{\log x}+2^{5-\log x}=12$ β) $2^{\log x}+3\ 4^{\log x}=52$ γ) $x^{\log x-3}=\frac{1}{100}$

δ) $x^{1+\log x}=10x$ ε) $x^{\log x-1}=100$

**19.** Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $4^{\ln x}-2^{\ln x}-e^{2\ln\sqrt{2}}=0$ β) $2^{\eta\mu^2 x}+2\ \sqrt{2}^{\ \sigma\upsilon\nu 2x-1}=3$

γ) $3^{2\eta\mu x+1}-5\cdot 6^{\eta\mu x}+4^{\eta\mu x+\frac{1}{2}}=0$ δ) $5^{\ln x}-3^{\ln x-1}=3^{\ln x+1}-5^{\ln x-1}$

**20.**Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2\sqrt{2}x^2-2x+4\sqrt{2}$

Α)Να κάνετε τη διαίρεση του P(x) με το $x-\sqrt{2}$

Β)Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0

Γ)Να λύσετε την εξίσωση :

$2\sqrt{2}\ln x+4\ln^2 x-\sqrt{2}\ln^3 x=8$

**21.**Να λύσετε τις ανισώσεις:

$i)\log\left(x^2+3x\right)\le 1$ ii)$\log\left(|x-3|-2\right)<0$

$iii)\log_3\left(x-15\right)<2$ iv)$\ln\left(|x|+2\right)-\ln\left(6-|x|\right)>0$

**22**.Να λύσετε τις ανισώσεις:

$i)1+\log\left(x+1\right)\le\log\left(32-x\right)$

$ii)x\cdot\ln 3+\ln\left(3^{x+1}-1\right)\ge\ln\left(3+7\cdot 3^x\right)$

$iii)\ln x-\ln\left(3x-2\right)\ge\ln 3-\ln\left(x^2+2\right)$

$iv)\log^2 x-\log x^3+2\le 0$

**23.** Να λυθούν οι ανισώσεις :

α) $x^{\log x+2}<10^{15}$ β) $\log[\log(x^2-4x-11)]\ge 0$

γ) $\log[\log(x^2-1)]>0$ δ) $x^{\log x-1}\ge 10^6$

**24.** Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $\log\ 2x-1\ >\log\ 3-x$ β) $\ln x^2>\ln\ x+2$

γ) $\ln^2 x-5\ln x+6>0$ δ) $\ln^2 x>\ln x$

**25.** Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\left.\begin{array}{l}\log x-\log y=\log 3\\ \log(x-y)=1\end{array}\right\}$ $9^{x-2y}\ 3^y=81$ β) $\left.\begin{array}{l}\log x+\log y=1\\ \end{array}\right\}$

γ) $\left.\begin{array}{l}x^{\log y}=100\\ x\ y=1000\end{array}\right\}$ δ) $\left.\begin{array}{l}3^{\log x}+5^{\log y}=14\\ 9^{\log x}-25^{\log y}=56\end{array}\right\}$

**26.** Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\left.\begin{array}{l}\log x-\log 2y=\log 2\\ \end{array}\right\}$ β) $\left.\begin{array}{l}\log x+\log y=3\\ \end{array}\right\}$

log(x+y)=1 $\log x^3-\log y^4=2$

γ) $\left.\begin{array}{l} x+y=65 \\ \log x+\log y=3 \end{array}\right\}$ δ) $\left.\begin{array}{l} \log(xy)=\frac{3}{2} \\ \log x-\log y=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$

ε) $\left.\begin{array}{l} 3^{\log x}+2^{\log y}=11 \\ 9^{\log x}-4^{\log y}=77 \end{array}\right\}$ ζ) $\left.\begin{array}{l} 2^{\log x}-3^{\log y}=1 \\ 4^{\log x}+9^{\log y}=25 \end{array}\right\}$

**27.** Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\left.\begin{array}{l} x^{\log y}=1000 \\ \log x+\log y=4 \end{array}\right\}$ β) $\left.\begin{array}{l} 4^x\cdot 16^y=4^{y+7} \\ \log x+\log y=1 \end{array}\right\}$

**28.** Να λυθεί η εξίσωση: $\log[\log(10^{x-1}+2)+1]=\log 2+\log x$

**29.** α) Αν x,y>0 ,δείξτε ότι $x^{\log y}=y^{\log x}$

β) Να λυθεί το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} x^{\log y}+y^{\log x}=20 \\ \log\sqrt{xy}=1 \end{array}\right\}$

**30.** Να λυθεί η εξίσωση: $\log 2^x+2\cdot 3^x+\log 81=\log 178+x\cdot\log 3$

**31**.Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=a(\log x)^4+8(\log x)^2\cdot\log(100x)$ για την οποία ισχύει f(10)=25.

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

Β)Να αποδείξετε ότι α=1

Γ)Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_f$ με τον άξονα x'x.

**32**. Να λυθούν οι εξισώσεις:

*i*) $\log_{x+1}(2x^2+8x+6)=2$

*ii*) $4^{x-3}=3^{x+2}$

*iii*) $\log_3(3^x-8)=2-x$

*iv*) $\log_2(9^{x-1}+11)=2+\log_2(3^{x-1}+2)$

**33.**Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$ και $g(x)=\ln x^2$

Α)Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων fκαι g.

Β)Να λύσετε τις ανισώσεις f(x)>0 και g(x)<0

Γ)Να συγρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g\left(\frac{2}{e}\right)$

Δ)Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)-f(x)=g\left(\sqrt{e-1}\right)$

**34.**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x-2)$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

Β)Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{6}}$

Γ)Να λύσετε την εξίσωση $4\cdot 4^{f(x)}-9\cdot 2^{f(x)}+100^{\log\sqrt{6}}-4=0$

**35.**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e\right)-1$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Β)Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0

**Π.36.**i) Να αποδείξετε ότι: $100^{\log\sqrt{3}}=3$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x}-2\cdot 3^{\log x}-100^{\log\sqrt{3}}=0$

**Π.37** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(e^{2x}-2\right)$ και $g(x)=\ln\left(5e^x+1\right)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των f και g

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$

**Π.38.** Α. Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $\ln x-\ln 2\geq 0$

ii) $\ln^2 x-\ln x\geq 0$

Β. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{\frac{\ln^2 x-\ln x}{\ln x-\ln 2}}$

**Π.39.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\log\left(x^2-4\right)-\log(3|x|)$

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της δεν τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

**Π.40.** Α. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\ln(e^{2x}-2e^{x}+3)$ και $g(x)=\ln 3+\ln(e^{x}-1)$.

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

**Π.41.** Να λυθεί η εξίσωση : $x\cdot\log(2^{x}+12)=x\cdot\log 4$.

**Π.42.** Δίνεται η ακολουθία $\alpha_{\nu}=x^{2\nu-1},\ 0<x\neq 1$

i) Να υπολογιστεί το άθροισμα $S_{\nu}=\ln\alpha_1+\ln\alpha_2+.....+\ln\alpha_{\nu}$

ii) Να λυθεί η εξίσωση $S_{\nu}=\nu^2\cdot\ln x$

**Π.43.** Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου $(\alpha_{\nu})$ είναι $\alpha_3=\log 125$ και η διαφορά της είναι $\omega=\log 5$.

i) Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος $\alpha_1$ είναι 1.605 με τη διαφορά ω.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $A=\alpha_{21}+\alpha_{22}+.....+\alpha_{29}$.

**Π.44.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln^2 x-\ln\frac{1}{x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να βρείτε σε ποια σημεία η συνάρτηση f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>f(e)$.

**Π.45.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

ii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=2$

iii) Αν $x>6$ να λυθεί η ανίσωση $f(x)>1$

**Π.46.** Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\log(4^{x}-8)$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=\log 7+x\log 2$.

**Π.47.** Α. Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$

Β. Να λυθεί η ανίσωση : $\log(3x+6) > \log(x+4)$ .

**Π.48.** Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \log(x^2+1)$ και $g(x) = \log x + \log 2$

Α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$ .

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ .

**Π.49.** Αν $f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1}$, να λυθεί η εξίσωση $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{10}{3}$.

**Π.50.** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων

$x \cdot \log 10 - \log 5 = \log(4^x - 12)$ και $e^{\ln x^2} - 10^{\log 3x} = -2$.

**Π.51.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $(\alpha_\nu)$ με $\alpha_1 = \ln 4$ και $\alpha_3 = \ln 4^5$.

i) Να βρείτε την διαφορά ω της προόδου.

ii) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S_\nu$ των ν πρώτων όρων της, δίνεται από τον τύπο $S_\nu = 2\nu^2 \cdot \ln 2$.

**Π.52.** Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο

$f(x) = \log(-x^2 + 5x - 6)$

Β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\lambda = 10^{1-\log 2}$.

Γ. Για λ = 5, να λύσετε την ανίσωση $-e^{2x} + \lambda \cdot e^x - 6 > 0$.

**Π.53.** Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$f(x) = \sqrt{-\ln^2 x + 5\ln x - 6}$.

Β. Να λυθεί η εξίσωση :

$\log x + \log x^3 + \log x^5 + ..... + \log x^{2003} + \log x^{2005} = 1003^2$.

**Π.54.** Δίνεται η $f(x) = \ln\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.

ii) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$.

**Π.55.** Έστω $f(x)=\ln g(x)-5$ , $g(x)=5^x$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

iii) Να λυθεί στο $\mathbb{N}$ η εξίσωση : $g(2)\cdot g(4)\cdot g(6)\ldots..g(2x)=0,04^{-36}$.

**Π.56.** Α. Να λυθεί η εξίσωση : $\log(x^2+2)-\log x=\log 3$.

Β. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης :

$f(x)=4+\log(2\cdot 4^x-5\cdot 2^x+2)$ .

**Π.57.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\log(2\cdot 25^x-5\cdot 4^x)$ και η ευθεία

$\varepsilon : y=x+2\log\sqrt{3}$.

Α. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η f.

Β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας (ε

**Π.58.** Έστω η f με $f(x)=\log(2+10^x)$ , $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)>\log 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(\log 2)=2\log 2$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=2x$.

**Π.59.** Να λύσετε την εξίσωση : $100^x-\log 100^3\cdot 10^x+8=0$.

**Π.60.** Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln(2^{2x}-1)$ .

Α. i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$ .

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=\ln(4^x-3^x+2)$ .

Β. Να λυθεί η ανίσωση : $\left(\frac{2004}{2005}\right)^{x^2-3x}<\left(\frac{2005}{2004}\right)^{2x-6}$

# ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

**1**.Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln(x-3)$ , x>3

Α)να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$

Β)Σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα χ'χ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;

Γ)ποια είναι η ασύμπτωτή της $C_f$

**2**.Α)να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες ορίζεται η παράσταση: $A=\ln x+\ln(x+6)$

Β)Να λύσετε την εξίσωση: $\ln x+\ln(x+6)=\frac{1}{2}\ln 49$

**3**.Να λύσετε την :

Α)εξίσωση $\ln\left(x^2-8\right)=\ln 7x$

Β)ανίσωση: $\ln\left(x^2-8\right)\geq\ln 7x$

**4**.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e\right)-1.$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Β)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

**5**.Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln\left(3-\sqrt{x+1}\right)$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Β)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

**6**.Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\ln(x^2+4)$ και g(x)=lnx+ln4

Α)Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Β)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$

**7**.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Β)Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x'x και y'y.

Γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y=\ln x$

**8**.Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$ και g(x)=lnx$^2$

Α)Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Β)Να λύσετε τις ανισώσεις: $f(x)>0$ και $g(x)<0$

Γ)Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g\left(\frac{2}{e}\right)$

Δ)να λύσετε την εξίσωση: $f(2x)-f(x)=g\left(\sqrt{e-1}\right)$

**9**.Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln\left(e^x-2\right)$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Β)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$

Γ)Να λύσετε την ανίσωση : $f(x)+x\geq 3\ln 2$

**10**.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1)$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Β)Να λύσετε την εξίσωση : $f(e^x)+f\left(e^x-2\right)=3\ln 2$

Γ)Να λύσετε την ανίσωση: $f(e^x)+f\left(e^x-2\right)\leq 3\ln 2$

**11**.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\log\frac{4^x-1}{2^x+5}$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Β)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log 3-\log 7$

Γ)Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)>\log 3-\log 7$

**12**.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x-2)$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

Β)Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{6}}$

Γ)Να λύσετε την εξίσωση : $4\cdot 4^{f(x)}-9\cdot 2^{f(x)}+100^{\log\sqrt{6}}-4=0$

**13**.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

Β)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$

Γ)Αν x>6, να λύσετε την ανίσωση $f(x)>1$

**14**.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(ex+1)$

Α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

Β)Να λύσετε την ανίσωση : $f(2x)<f(x)$

Γ)Να λύσετε την εξίσωση : $f(\sqrt{3}\cdot\eta\mu x)=f(\sigma\upsilon\nu x)$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

**15**.Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x)=5x^3-8x^2+a$ ,$\alpha\in\mathbb{R}$

Α)Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-2 , να βρείτε το α.

Β)Για α=-8 να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

Γ)Να λύσετε την εξίσωση : $\dfrac{\left(\ln^2 x+1\right)^3}{\left(\ln^2 x+1\right)^2+1}=\dfrac{8}{5}$

**16**.Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x)=x^3+ax^2+\beta x+6$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Α)Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β , ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το x+1 και η αριθμητική τιμή του για x=2 να είναι ίση με 12.

Β) Για α=-2 και β=3

i) να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x-2.

ii) να λύσετε την ανίσωση : $P(x)\le -x+14$

iii) Να λύσετε την ανίσωση: $P(\ln x)\le -\ln x+14$

**17**. Σε ένα πείραμα εργαστηρίου ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο: $P(t)=200e^{ct}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος. Σε μια ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328. (Δίνεται $\ln 1,64\cong 0,5$ και $\ln 10\cong 2,3$)

Α)Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα

Β)Να αποδείξετε ότι c=$\dfrac{1}{2}$

Γ)Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής τους τιμής.

**18**.Σε μια περιοχή της ευρωπαϊκής ένωσης , λόγω των μέτρων που πάρθηκαν , ο πληθυσμός των αγροτών (σε χιλιάδες) μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής ( $Q(t)=Q_0e^{ct}$ ). Ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες αγρότες και μετά από δύο χρόνια έμεινε ο μισός.

Α)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό μετά από t χρόνια είναι : $Q(t)=8e^{-\frac{t}{2}\ln 2}$

Β)Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από τέσσερα χρόνια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ)Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο αγροτικός πληθυσμός της περιοχής θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**19**.Μια ποσότητα ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη) μειώνεται ακολουθώντας τον νόμο της εκθετικής μεταβολής ( $Q(t) = Q_0 e^{ct}$ ) .

Α)Αν γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας , να αποδείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^t$

Β)Αν μετά από τέσσερα χρόνια η ποσότητα που έχει απομείνει είναι 1 κιλό , να βρείτε την αρχική ποσότητα που θαφτηκε.

Γ)Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

**20**.Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 lt ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι , ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά βδομάδα.

Α)Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της $1^{ης}$ και στο τέλος της $2^{ης}$ εβδομάδας.

Β)Ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση: $V(t) = V_0 a^t$ , όπου $V_0$ και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς $V_0$ και α.

Γ)να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.