# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

**1.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν :

$$|\vec{\alpha}|=4\ ,\ |\vec{\beta}|=5 \text{ και } \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\frac{5}{8}\vec{\alpha}.$$

α)Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=10$

β)Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

γ)Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

δ)Αν το διάνυσμα $\vec{v}=\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta},\kappa\in\Re$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\beta}$ να βρείτε την τιμή του κ.

(Ο.Ε.Φ.Ε 2004)

**2.**Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν

$$\vec{\alpha}=\left(1,8-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right) \text{ και } \vec{\beta}=\left(2,\frac{1}{\sqrt{5}}|\vec{\beta}|\right)$$

α)Να αποδείξετε ότι:

i)$|\vec{\beta}|=\sqrt{5}$

ii)$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=5$

β)Να υπολογίσετε τη γωνία $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$

γ) i)Να αποδείξετε ότι $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

ii)Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\beta}$.

(Ο.Ε.Φ.Ε 2005)

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

**3**.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2,|\vec{\beta}|=3,(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ διάμεσος του για το οποίο ισχύουν:

$$\overrightarrow{AB}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta} \text{ και } \overrightarrow{AM}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$$

α)Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β)Να εκφράσετε το $\overrightarrow{A\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

γ)Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου $\overrightarrow{AM}$.

δ)Να αποδείξετε ότι η γωνία των $\overrightarrow{AM}$ και $\vec{\alpha}$ είναι ίση με $\frac{\pi}{6}$.

(Ο.Ε.Φ.Ε 2006)

**4**. Έστω τα σημεία Α(-1,ψ) και Β(2χ,ψ) με $\chi,\psi\in\Re$ του καρτεσιανού επιπέδου Οχψ.

Α. Αν είναι $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ(χ,ψ) ανήκουν στην παραβολή $C_1$: $\psi^2=2\chi$ , της οποίας να βρείτε την εστία Ε και την διευθετούσα δ.

Β.Αν ισχύει $3\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2=15$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ(χ,ψ) ανήκουν στο κύκλο $C_2$:$x^2+\psi^2=3$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ. Να αποδείξετε ότι :

α)Τα σημεία των $C_1$ και $C_2$ είναι το $K(1,\sqrt{2})$ και το $\Lambda(1,-\sqrt{2})$

β)Η εφαπτομένη της $C_1$ στο Κ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του $C_2$ στο Λ.

(Ο.Ε.Φ.Ε 2008)

**5**.Στο καρτεσιανό επίπεδο Οχψ δίνονται τα σημεία Α(2,0) Β(4,5) ,Γ(6,κ) με $\kappa\in\Re-\{10\}$ .

α)Να δείξετε ότι:

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

i)Τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

ii)Η εξίσωση της ευθείας της διαμέσου (ε) που φέρουμε από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ είναι χ=4.

β)Να προσδιορίσετε την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ , αν το εμβαδό του είναι (ΑΒΓ)=8 τετρ. Μονάδες.

γ)Για κ=2 , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας του ύψους (η) που φέρουμε από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ, καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου Δ στο οποίο τέμνονται οι ευθείες (ε) και (η).

(Ο.Ε.Φ.Ε 2008)

**6.**Δίνονται τα σημεία Α(1,0) Β(1,1) Γ(-1,2)

Να βρείτε:

i)$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ και το $\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|$

ii)την γωνία Α.

iii)το ύψος από την κορυφή Γ.

iv)το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

**7.**Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $\left|\vec{\alpha}\right|=2,\left|\vec{\beta}\right|=3$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{2\pi}{3}$. Θεωρώ το τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AM}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ,όπου ΑΜ διάμεσος.

i)Να βρεθεί το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

ii) Να εκφράσετε το $\overrightarrow{A\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

iv)Να βρεθεί το μήκος του $\overrightarrow{AM}$ και να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει το $\overrightarrow{AM}$ με το $\vec{\alpha}$.

**8.**Δίνεται η C:$y^2$=4x και M(1,-2)

i)Να δειχτεί ότι M∈C και να βρεθεί η εφαπτομένη του C στο M.

ii)Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΕΜ όπου Ε η εστία της C και να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται στον y'y και να βρεθεί το σημείο επαφής.

iii)Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με εκκεντρότητα =2

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΙΕΤΡΟΣ

και κορυφές Α ,Α΄ όπου Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς Ο.

**9**.Α.Θεωρούμε στο καρτεσιανό επίπεδο Οχy τη γραμμή με εξίσωση $x^2+y^2+6x-8y=0$

α)Να αποδείξετε ότι η προηγούμενη εξίσωση παριστάνει κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο(0,0) και Α(-6,8) είναι τα άκρα μιας διαμέτρου του κύκλου.

Β.Δίνονται οι ευθείες:

$\varepsilon_\alpha$:αχ-y=0 και $\zeta_\alpha$:χ+αy=2 ,$\alpha\in\mathbb{R}$

α)Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ , οι ευθείες $\varepsilon_\alpha$ διέρχονται από σταθερό σημείο Α και οι ευθείες $\zeta_\alpha$ διέρχονται από σταθερό σημείο Β , τα οποία και να προσδιορίσετε.

β) Αν Μ(χ,y) είναι το σημείο τομής των $\varepsilon_\alpha$ και $\zeta_\alpha$ να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ το Μ κινείται σε κύκλο , του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

**10**.Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-1)\chi+2\lambda y-\lambda^2-2\lambda-\gamma=0$, όπου λ πραγματικός και γ πραγματική σταθερά.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.

β)Αν γ=-1 , να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο

γ)Αν $\gamma\neq-1$ , να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μία ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση.

**11**.Θεωρούμε την εξίσωση : $(2\lambda-1)\chi+(3\lambda+4)y-8\lambda-7=0$ ,$\lambda\in\mathbb{R}$

i)Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία.

ii)Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η ευθεία διέρχεται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρείτε.

iii)Να βρείτε τις τιμές του λ, όταν η παραπάνω ευθεία εφάπτεται στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

**12**.Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1)$ $y=2x+1$ και $(\varepsilon_2)$:$y=2x-1$.

A.i)Να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση

ii)Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που ισαπέχει από τις $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ .

B.i)Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται των ευθειών $(\varepsilon_1)$ ,$(\varepsilon_2)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (η):$x+y=3$.

ii)Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που βρήκατε , οι οποίες είναι κάθετες στις $(\varepsilon_1)$ , $(\varepsilon_2)$.

**13.**Δίνονται τα σημεία Α(α,0) και Γ(2α,3α) ,$\alpha \neq 0$ .

Η κάθετη ευθεία στην ΑΓ στο Α τέμνει την (ε) :$x+2\alpha=0$ στο σημείο Β.

i)Βρείτε τις συντεταγμένες του Β.

ii)Να δείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

iii)Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο Α και ακτίνα ΑΒ

**Π.14**.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ κορυφών Α(1,1),Β(-1,2) και Γ(3,1).

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Α και εφάπτεται στην ΒΓ.

**Π.15**.Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$ και η ευθεία (ε): $y=x-1$.

Α)να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.

Β)να βρείτε τα κοινά σημεία Α,Β της (ε) και της παραβολής.

Γ)να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής στα Α,Β είναι κάθετες.

**16.**Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ .

A. i) Να γράψετε τον κύκλο στη μορφή $(x-a)^2+(y-\beta)^2=R^2$. και να βρείτε κέντρο και ακτίνα.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

ii)Να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπεται στον $\chi'\chi$ .

B. i)Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο P , του κέντρου του κύκλου ως προς την ευθεία y=x.

ii)Αν P(2,1) το προηγούμενο σημείο ,δείξτε ότι το P εσωτερικό του κύκλου.

Γ)Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το P(2,1) και τεμνει τον κύκλο στα A,B ώστε το P να είναι μέσο της χορδής AB

**17**. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{AB}=(4,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(1,7)$

i)Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$.

ii)Να δείξετε ότι το $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{B\Delta}$ και να προσδιορίσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

iii)Αν το σημείο Α κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=4$ να αποδείξετε ότι και το κέντρο Κ του ΑΒΓΔ κινείται σε ορισμένο κύκλο.

**Π.18**.Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-4x\eta\mu\theta-6y\sigma\upsilon\nu\theta+4\eta\mu^2\theta=0,\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Να αποδείξετε ότι:

Α)η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (C) του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

Β)Ο κύκλος (C) εφάπτεται στην ευθεία y=0.

Γ)Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε μια έλλειψη της οποίας να βρεθούν τα μήκη των αξόνων ,οι εστίες και η εκκεντρότητα.

**Π.19**.Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2+y^2-6x+1=0$ και η παραβολή $C_2: y^2=4x$

Α)Να βρεθεί το κέντρο Κ και η ακτίνα ρ του κύκλου $C_1$.

Β)Να βρεθούν τα κοινά σημεία Α,Β του κύκλου και της Παραβολής.

Γ)Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ της

ΓΥΜΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

παραβολής στα σημεία της Α,Β

Δ)Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ εφάπτονται στον κύκλο.

**20**. Η ευθεία $|\vec{a}|^2 x+|\vec{\beta}|^2 y=\vec{a}\bullet\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ τέμνει τους άξονες yy' και χ΄χ ορθοκανονικού συστήματος στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Αν τα σημεία αυτά είναι εστίες των παραβολών $C_1: x^2=2p_1y$ και $C_2: y^2=2p_2x$ με $p_1p_2=4$ να δειχτεί ότι τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

**21**.Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ και η παραβολή $y^2=16x$.

Να βρεθούν :

i) οι εστίες της έλλειψης και της παραβολής

ii) Να βρεθούν οι εφαπτομένες της παραβολής στα σημεία Μ(4,8) και Μ΄(4,-8)

iii) Να δειχτεί ότι $\overrightarrow{E'M}\bullet\overrightarrow{E'M'}=0$

**22**.Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2=4$ και $C_2: x^2+y^2=9$. Από τυχαίο σημείο Μ(α,β) του κύκλου $C_2$ φέρνουμε εφαπτομένες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ προς τον $C_1$ με Α,Β αντίστοιχα σημεία επαφής.

α)Δείξτε ότι η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $ax+\beta y=4$

β)Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΜΑΒ.

γ)Να υπολογιστεί η εφαπτομένη της ΑΜΒ.

**23**.Δίνονται οι ευθεία ε: $ax-2y+1=0$ και ο κύκλος

C: $x^2+(y-a)^2=4, a\in\mathbb{R}$ .

i)Δείξτε ότι η ευθεία ε διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $a\in\mathbb{R}$

ii)Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η ε να τέμνει τον κύκλο C.Για ποια τιμή του $a\in\mathbb{R}$ η ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου;

iii)Αν α=1 να υπολογιστεί το εμβαδό του τριγώνου με

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

κορυφές το κέντρο του κύκλου και τα σημεία τομής της ε με τον C.

**24**.Δίνονται ο κύκλος C: $x^2+y^2=1$ και η έλλειψη C' : $x^2+4y^2=4$

i)Να δειχτεί ότι οι εφαπτομένες που φέρονται από τις εστίες της έλλειψης προς τον κύκλο σχηματίζουν ρόμβο.

ii)Αν $E_1$ είναι το εμβαδό του παραπάνω ρόμβου και $E_2$ το εμβαδό του ορθογωνίου που σχηματίζεται από τα σημεία επαφής να δειχτεί ότι $E_1=\frac{9}{4}E_2$.

**25**.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(\lambda,-1+\lambda),\lambda\in\mathbb{R}$ και η εξίσωση :

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|x+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|y+\sqrt{2}\vec{a}\vec{\beta}=0 \quad (1)$$

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία

β)Αν ε είναι η ευθεία που ορίζεται από την (1) και είναι παράλληλη στην (η):x+y+5=0 να βρείτε

i) το διάνυσμα $\vec{\beta}$

ii)την εξίσωση της ε.

**26**.Δίνεται η εξίσωση $4x^2+9y^2-12xy-36=0$ (1)

Α.Να δειχτεί ότι τα σημεία που επαληθεύουν την εξίσωση (1) ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$.

Β.Να δειχτεί ότι η μεσοπαράλληλη ευθεία των $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**27**. Δίνονται οι κύκλοι:

$C_1$: $x^2+y^2-6x+2y-15=0$ και $C_2$:$x^2+y^2+2x-2y-23=0$

Α. Δείξτε ότι οι κύκλοι $C_1$ και $C_2$ είναι ίσοι και ότι τέμνονται σε δύο σημεία Α , Β.

Β.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ΑΒ , κοινής χορδής τψν δύο κύκλων

Γ. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας ΑΒ ώστε η γωνία ΚΛΜ , με Κ , Λ τα κέντρα των δύο κύκλων να είναι ορθή.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

**28**.Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ και ο κύκλος $C_1: x^2+y^2-6y-91=0$

i)Να βρείτε τις εστίες της C και το κέντρο του $C_1$. Να δείξετε ότι μια από τις εστίες της C ταυτίζεται με το κέντρο του $C_1$.

ii)Να δείξετε ότι οι κύκλοι που εφάπτονται εσωτερικά του $C_1$ και έχουν τα κέντρα τους στην C διέρχονται από σταθερό σημείο.

**29**.**Α.** Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και η υπερβολή $C_1; \frac{x^2}{\alpha}-\frac{y^2}{\beta}=\alpha-\beta,\ \alpha>\beta>0$ Να δείξετε ότι :

i) Έχουν τις ίδιες εστίες η έλλειψη και η υπερβολή

ii) Αν ε η εκκεντρότητα της C και $\varepsilon_1$ η εκκεντρότητα της $C_1$ να δείξετε ότι : $\varepsilon^2=\varepsilon_1^{\ 2}(2-\varepsilon_1^{\ 2})$

Β. Αν $M(x_0,y_0)$ είναι ένα κοινό σημείο τους να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης και της υπερβολής στο M είναι κάθετες.

**30**.Δίνεται η έλλειψη $C: 3x^2+4y^2=12$ και η εξίσωση

$$C_1: x^2+y^2-2x+2y=\alpha-1981$$

Για ποιες τιμές του α η $C_1$ παριστάνει κύκλο.

Για ποια τιμή του α ο κύκλος $C_1$ διέρχεται από την εστία Ε' (-γ,0) της έλλειψης C.

Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της έλλειψης C στο $M(1,\frac{3}{2})$ να εφάπτεται του κύκλου $C_1$

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

**31.** Δίνεται η εξίσωση :

$$C: \frac{x^2}{10+8\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{y^2}{10-8\sigma\upsilon\nu\theta} = 1,\ \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Να βρεθεί τι παριστάνει η C για τις διάφορες τιμές του θ.

Να δείξετε ότι το σημείο $M(|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|, |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|)$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \theta$, ανήκει στην C.

Αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C στο M, να βρεθεί η συγκεκριμένη εξίσωση της C ώστε ο $\lambda^2$ να γίνεται μέγιστος.

**32.** Δίνεται η υπερβολή $C: x^2 - 3y^2 = 3$ και το σημείο της $M(3,\sqrt{2})$

Να βρεθεί το συμμετρικό της εστίας E της υπερβολής ως προς την εφαπτομένη της υπερβολής στο M.

Να δείξετε ότι το συμμετρικό της εστίας E βρίσκονται σε κύκλο που έχει κέντρο την άλλη εστία E' και ακτίνα $2\sqrt{3}$.

**33.** Έστω η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1,\ \alpha > \beta > 0$ και το σημείο K(0,2β).

Μια μεταβλητή ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σταθερό σημείο K και τέμνει της εφαπτομένες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονα της στα σημεία M και N.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο MN ως συνάρτηση του λ

β) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο κύκλος με διάμετρο MN να διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

**34.** Έστω η υπερβολή $C: x^2 - \psi^2 = \alpha^2$ και το σημείο της $M(x_0, \psi_0)$.

Η εφαπτομένη (ε) της υπερβολής στο σημείο M τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία Γ και Δ.

Να αποδειχθεί ότι : i) (ΟΔ) (ΟΓ)= $2\alpha^2$ ii) Το M είναι μέσο του ΓΔ iii)Εμβ(ΟΓΔ)=$\alpha^2$

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

**35.** Αν οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ και $C_2: \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{\psi^2}{\alpha^2}=1\ \alpha>\beta>0$ τέμνονται σε τέσσερα διαφορετικά σημεία, να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά είναι ομοκυκλικά.

**36.** Δίνεται η παραβολή $C: \psi^2=4x$ και τα σημεία της $M(t^2,2t), P(\mu^2,2\mu), t\neq\mu, t\in R^*$. Οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Μ και Ρ τέμνονται στο σημείο Τ. Αν η ευθεία ΜΡ διέρχεται από το σημείο Σ(4,0), να αποδειχθεί ότι :

α) $t\mu=-4$ β) Το Τ κινείται σε σταθερή ευθεία.

**37.** Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων της έλλειψης $C_1: x^2+2\psi^2=2$ και της παραβολής $C_2: \psi^2=4x$.

**38.** Έστω η παραβολή $C: \psi^2=4x$ και τα σημεία της $A(t^2,2t), B(\mu^2,2\mu)$. Αν η ευθεία ΑΒ σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $30°$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ της χορδής ΑΒ.

**39.** Έστω η παραβολή $C: y^2=2px(p>0)$ και η εφαπτομένη της (ε) σ' ένα σημείο $A(x_1,y_1)$ αυτής, η οποία τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο Β.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α και Β ως συνάρτηση των p και $y_1$.

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που γράφεται με διάμετρο την ΑΒ διέρχεται από την εστία της παραβολής.

**40.** Α. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη και η εκκεντρότητα της είναι ίση με 2.

Β. Στην υπερβολή $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ θεωρούμε την εφαπτομένη στο τυχαίο σημείο της Μ και την κάθετη στην εφαπτομένη στο

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

σημείο Μ.
Αν η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο p και η κάθετη στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OK}=16$.

**41**.Να αποδείξετε ότι η παραβολή $C_1: y^2=2px$ και η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1, \alpha>\beta$, τέμνονται κάθετα αν και μόνο αν η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$

**42**.Μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x τέμνει την ισοσκελή υπερβολή $C: x^2-y^2=\alpha^2$ στα σημεία Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος διαμέτρου ΓΔ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής.

**43**.Δίνεται η παραβολή C: $y^2=4x$ και η ευθεία ε:y=x+2008.
Να βρείτε:
i)την εστία Ε και την διευθετούσα δ της παραβολής
ii)την εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε)
iii)την εξίσωση της έλλειψης της οποίας η μία εστία συμπίπτει με την εστία της παραβολής και έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{1}{2}$
iv) την εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής της οποίας η μία εστία συμπίπτει με την εστία της παραβολής.

**44**.Έστω τα σημεία Α(0,α) ,Ε(0,2α) με α>0 και τα συμμετρικά τους ως προς την αρχή των αξόνων Α΄ και Ε΄ αντίστοιχα. Να βρείτε :
α)i)την εξίσωση του κύκλου (C) με διάμετρο ΑΑ΄ .
ii)ττις εξισώσεις των εφαπτομένων $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ του κύκλου (C ) που διέρχονται από το σημείο Ε και να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.
β)Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ του

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

κύκλου (C ) και οι ασύμπτωτες της υπερβολής με εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ και κορυφές τα σημεία Α και Α΄ σχηματίζουν δυο ζεύγη κάθετων ευθειών.

**45**.α)Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C που έχει άξονα συμμετρίας τον χ΄χ ,κορυφή την αρχή των αξόνων και διευθετούσα δ=-1.

β)Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της παραβολής C η οποία είναι κάθετη στην ευθεία η:4x+3y+1=0 έχει εξίσωση ε: $y=\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}$.

γ)Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην (ε).

δ)Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής και του κύκλου.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
Μπάρλας Αναστάσιος , Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική
2.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
Τραγανίτης Α., Εκδόσεις Σαββάλας
3.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
Χ&Ι Στεργίου , Χ . Νάκης , Εκδόσεις Σαββάλας
4.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
Θ.Τζουβάρας,Κ.Τζιρώνης ,Εκδόσεις Σαββάλλα
5.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
Κωστα Κυριακόπουλου ,Εκδόσεις Πατάκη
6.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
Ηλιόπουλος Γιάννης ,Εκδόσεις Ζήτη

Επίσης από τις παρακάτω ηλεκτρονικές διευθύνσεις:
1.http://users.sch.gr/fergadioti/
2.www.oktonia.com
3.www.pi-schools.gr/lessons/mathematics/
4.www.ems.gr

Σε όποιες ασκήσεις μπροστά έχει το γράμμα Π σημαίνει ότι οι ασκήσεις αυτές έχουν μπεί στις Προαγωγικές εξετάσεις στα λύκεια της Στερεάς Ελλάδας και είναι στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

http://stellad.pde.sch

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ