ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν :

$$|\vec{\alpha}|=4 \;,\; |\vec{\beta}|=5 \;\text{ και }\; \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\frac{5}{8}\vec{\alpha}.$$

α)Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=10$

β)Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

γ)Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

δ)Αν το διάνυσμα $\vec{v}=\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta},\kappa\in\Re$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\beta}$ να βρείτε την τιμή του κ.

(Ο.Ε.Φ.Ε 2004)

2.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν

$$\vec{\alpha}=\left(1{,}8-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right) \;\text{ και }\; \vec{\beta}=\left(2,\frac{1}{\sqrt{5}}|\vec{\beta}|\right)$$

α)Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\beta}|=\sqrt{5}$

ii) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=5$

β)Να υπολογίσετε τη γωνία $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$

γ) i)Να αποδείξετε ότι $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

ii)Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\beta}$.

(Ο.Ε.Φ.Ε 2005)

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

3.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=3, (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ διάμεσος του για το οποίο ισχύουν:

$$\overrightarrow{AB}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AM}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$$

α)Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β)Να εκφράσετε το $\overrightarrow{A\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

γ)Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου $\overrightarrow{AM}$.

δ)Να αποδείξετε ότι η γωνία των $\overrightarrow{AM}$ και $\vec{\alpha}$ είναι ίση με $\frac{\pi}{6}$.

(Ο.Ε.Φ.Ε 2006)

4. Έστω τα σημεία Α(-1,ψ) και Β(2χ,ψ) με $\chi,\psi\in\Re$ του καρτεσιανού επιπέδου Οχψ.

Α. Αν είναι $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ(χ,ψ) ανήκουν στην παραβολή C_1: $\psi^2=2\chi$, της οποίας να βρείτε την εστία Ε και την διευθετούσα δ.

Β.Αν ισχύει $3\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2=15$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ(χ,ψ) ανήκουν στο κύκλο C_2:$x^2+\psi^2=3$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ. Να αποδείξετε ότι :

α)Τα σημεία των C_1 και C_2 είναι το $K(1,\sqrt{2})$ και το $\Lambda(1,-\sqrt{2})$

β)Η εφαπτομένη της C_1 στο Κ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του C_2 στο Λ.

(Ο.Ε.Φ.Ε 2008)

5.Στο καρτεσιανό επίπεδο Οχψ δίνονται τα σημεία Α(2,0) Β(4,5) ,Γ(6,κ) με $\kappa\in\Re-\{10\}$.

α)Να δείξετε ότι:

i)Τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

ii)Η εξίσωση της ευθείας της διαμέσου (ε) που φέρουμε από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ είναι χ=4.

β)Να προσδιορίσετε την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ , αν το εμβαδό του είναι (ΑΒΓ)=8 τετρ. Μονάδες.

γ)Για κ=2 , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας του ύψους (η) που φέρουμε από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ, καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου Δ στο οποίο τέμνονται οι ευθείες (ε) και (η).

(Ο.Ε.Φ.Ε 2008)

6.Δίνονται τα σημεία Α(1,0) Β(1,1) Γ(-1,2)

Να βρείτε:

i)$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ και το $\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|$

ii)την γωνία Α.

iii)το ύψος από την κορυφή Γ.

iv)το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

7.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $\left|\vec{\alpha}\right|=2,\left|\vec{\beta}\right|=3$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{2\pi}{3}$. Θεωρώ το τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AM}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$,όπου ΑΜ διάμεσος.

i)Να βρεθεί το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

ii) Να εκφράσετε το $\overrightarrow{A\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

iv)Να βρεθεί το μήκος του $\overrightarrow{AM}$ και να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει το $\overrightarrow{AM}$ με το $\vec{\alpha}$.

8.Δίνεται η C:y^2=4x και Μ(1,-2)

i)Να δειχτεί ότι Μ∈C και να βρεθεί η εφαπτομένη του C στο Μ.

ii)Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΕΜ όπου Ε η εστία της C και να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται στον y'y και να βρεθεί το σημείο επαφής.

iii)Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με εκκεντρότητα =2

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

και κορυφές Α ,Α΄ όπου Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς Ο.

9.Α.Θεωρούμε στο καρτεσιανό επίπεδο Οχy τη γραμμή με εξίσωση $x^2+y^2+6x-8y=0$

α)Να αποδείξετε ότι η προηγούμενη εξίσωση παριστάνει κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο(0,0) και Α(-6,8) είναι τα άκρα μιας διαμέτρου του κύκλου.

Β.Δίνονται οι ευθείες:

ε_α:αχ-y=0 και ζ_α:χ+αy=2 ,$\alpha\in\mathbb{R}$

α)Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, οι ευθείες ε_α διέρχονται από σταθερό σημείο Α και οι ευθείες ζ_α διέρχονται από σταθερό σημείο Β , τα οποία και να προσδιορίσετε.

β) Αν Μ(χ,y) είναι το σημείο τομής των ε_α και ζ_α να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ το Μ κινείται σε κύκλο , του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

10.Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-1)\chi+2\lambda y-\lambda^2-2\lambda-\gamma=0$, όπου λ πραγματικός και γ πραγματική σταθερά.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.

β)Αν γ=-1 , να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο

γ)Αν $\gamma\neq-1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μία ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση.

11.Θεωρούμε την εξίσωση : $(2\lambda-1)\chi+(3\lambda+4)y-8\lambda-7=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$

i)Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία.

ii)Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η ευθεία διέρχεται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρείτε.

iii)Να βρείτε τις τιμές του λ, όταν η παραπάνω ευθεία εφάπτεται στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

12.Δίνονται οι ευθείες (ε_1) y=2x+1 και (ε_2):y=2x-1.

A.i)Να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση

ii)Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 .

B.i)Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται των ευθειών (ε_1) ,(ε_2) και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (η):x+y=3.

ii)Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που βρήκατε , οι οποίες είναι κάθετες στις (ε_1) , (ε_2).

13.Δίνονται τα σημεία Α(α,0) και Γ(2α,3α) ,$\alpha \neq 0$.

Η κάθετη ευθεία στην ΑΓ στο Α τέμνει την (ε) :x+2α=0 στο σημείο Β.

i)Βρείτε τις συντεταγμένες του Β.

ii)Να δείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

iii)Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο Α και ακτίνα ΑΒ

Π.14.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ κορυφών Α(1,1),Β(-1,2) και Γ(3,1).
Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Α και εφάπτεται στην ΒΓ.

Π.15.Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία (ε): $y = x - 1$.

Α)να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.

Β)να βρείτε τα κοινά σημεία Α,Β της (ε) και της παραβολής.

Γ)να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής στα Α,Β είναι κάθετες.

16.Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

A. i) Να γράψετε τον κύκλο στη μορφή
$(x-a)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$. και να βρείτε κέντρο και ακτίνα.

ii)Να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται στον χ΄χ .

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

B. i)Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο Ρ , του κέντρου του κύκλου ως προς την ευθεία y=x.

ii)Αν Ρ(2,1) το προηγούμενο σημείο ,δείξτε ότι το Ρ εσωτερικό του κύκλου.

Γ)Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το Ρ(2,1) και τεμνει τον κύκλο στα Α,Β ώστε το Ρ να είναι μέσο της χορδής ΑΒ

17. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{AB}=(4,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(1,7)$

i)Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$.

ii)Να δείξετε ότι το $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{B\Delta}$ και να προσδιορίσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

iii)Αν το σημείο Α κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=4$ να αποδείξετε ότι και το κέντρο Κ του ΑΒΓΔ κινείται σε ορισμένο κύκλο.

Π.18.Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-4x\eta\mu\theta-6y\sigma\upsilon\nu\theta+4\eta\mu^2\theta=0,\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Να αποδείξετε ότι:

Α)η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (C) του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

Β)Ο κύκλος (C) εφάπτεται στην ευθεία y=0.

Γ)Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε μια έλλειψη της οποίας να βρεθούν τα μήκη των αξόνων ,οι εστίες και η εκκεντρότητα.

Π.19.Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2+y^2-6x+1=0$ και η παραβολή $C_2: y^2=4x$

Α)Να βρεθεί το κέντρο Κ και η ακτίνα ρ του κύκλου C_1.

Β)Να βρεθούν τα κοινά σημεία Α,Β του κύκλου και της Παραβολής.

Γ)Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

παραβολής στα σημεία της Α,Β

Δ)Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται στον κύκλο.

20. Η ευθεία $\left|\vec{a}\right|^2 x+\left|\vec{\beta}\right|^2 y=\vec{a}\bullet\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ τέμνει τους άξονες yy' και χ΄χ ορθοκανονικού συστήματος στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Αν τα σημεία αυτά είναι εστίες των παραβολών $C_1: x^2=2p_1y$ και $C_2: y^2=2p_2x$ με $p_1p_2=4$ να δειχτεί ότι τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

21.Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ και η παραβολή $y^2=16x$.

Να βρεθούν :

i) οι εστίες της έλλειψης και της παραβολής

ii) Να βρεθούν οι εφαπτομένες της παραβολής στα σημεία Μ(4,8) και Μ΄(4,-8)

iii) Να δειχτεί ότι $\overrightarrow{\text{Ε΄Μ}}\bullet\overrightarrow{\text{Ε΄Μ΄}}=0$

22.Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2=4$ και $C_2: x^2+y^2=9$. Από τυχαίο σημείο Μ(α,β) του κύκλου C_2 φέρνουμε εφαπτομένες ε_1 και ε_2 προς τον C_1 με Α,Β αντίστοιχα σημεία επαφής.

α)Δείξτε ότι η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $ax+\beta y=4$

β)Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΜΑΒ.

γ)Να υπολογιστεί η εφαπτομένη της ΑΜΒ.

23.Δίνονται οι ευθεία $\varepsilon: ax-2y+1=0$ και ο κύκλος $C: x^2+\left(y-a\right)^2=4, a\in\mathbb{R}$.

i)Δείξτε ότι η ευθεία ε διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $a\in\mathbb{R}$

ii)Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η ε να τέμνει τον κύκλο C.Για ποια τιμή του $a\in\mathbb{R}$ η ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου;

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

iii)Αν α=1 να υπολογιστεί το εμβαδό του τριγώνου με κορυφές το κέντρο του κύκλου και τα σημεία τομής της ε με τον C.

24.Δίνονται ο κύκλος C: $x^2+y^2=1$ και η έλλειψη C’ : $x^2+4y^2=4$

i)Να δειχτεί ότι οι εφαπτομένες που φέρονται από τις εστίες της έλλειψης προς τον κύκλο σχηματίζουν ρόμβο.

ii)Αν E_1 είναι το εμβαδό του παραπάνω ρόμβου και E_2 το εμβαδό του ορθογωνίου που σχηματίζεται από τα σημεία επαφής να δειχτεί ότι $E_1=\frac{9}{4}E_2$.

25.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(\lambda,-1+\lambda),\lambda\in\mathbb{R}$ και η εξίσωση :

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|x+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|y+\sqrt{2}\vec{a}\vec{\beta}=0 \quad (1)$$

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία

β)Αν ε είναι η ευθεία που ορίζεται από την (1) και είναι παράλληλη στην (η):x+y+5=0 να βρείτε

i) το διάνυσμα $\vec{\beta}$

ii)την εξίσωση της ε.

26.Δίνεται η εξίσωση $4x^2+9y^2-12xy-36=0$ (1)

Α.Να δειχτεί ότι τα σημεία που επαληθεύουν την εξίσωση (1) ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2.

Β.Να δειχτεί ότι η μεσοπαράλληλη ευθεία των ε_1 και ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

27. Δίνονται οι κύκλοι:

C_1: $x^2+y^2-6x+2y-15=0$ και C_2:$x^2+y^2+2x-2y-23=0$

Α. Δείξτε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 είναι ίσοι και ότι τέμνονται σε δύο σημεία Α , Β.

Β.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ΑΒ , κοινής χορδής τψν δύο κύκλων

Γ. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας ΑΒ ώστε η γωνία ΚΛΜ ,

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

με Κ , Λ τα κέντρα των δύο κύκλων να είναι ορθή.

28.Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ και ο κύκλος $C_1: x^2+y^2-6y-91=0$

i)Να βρείτε τις εστίες της C και το κέντρο του C_1. Να δείξετε ότι μια από τις εστίες της C ταυτίζεται με το κέντρο του C_1.

ii)Να δείξετε ότι οι κύκλοι που εφάπτονται εσωτερικά του C_1 και έχουν τα κέντρα τους στην C διέρχονται από σταθερό σημείο.

29.**Α.** Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και η υπερβολή $C_1; \frac{x^2}{\alpha}-\frac{y^2}{\beta}=\alpha-\beta,\ \alpha>\beta>0$ Να δείξετε ότι :

i) Έχουν τις ίδιες εστίες η έλλειψη και η υπερβολή

ii) Αν ε η εκκεντρότητα της C και ε_1 η εκκεντρότητα της C_1 να δείξετε ότι : $\varepsilon^2=\varepsilon_1^2(2-\varepsilon_1^2)$

Β. Αν $M(x_0, y_0)$ είναι ένα κοινό σημείο τους να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης και της υπερβολής στο Μ είναι κάθετες.

30.Δίνεται η έλλειψη $C: 3x^2+4y^2=12$ και η εξίσωση

$$C_1: x^2+y^2-2x+2y=\alpha\text{-}1981$$

Για ποιες τιμές του α η C_1 παριστάνει κύκλο.

Για ποια τιμή του α ο κύκλος C_1 διέρχεται από την εστία Ε' (-γ,0) της έλλειψης C.

Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της έλλειψης C στο $M(1,\frac{3}{2})$ να εφάπτεται του κύκλου C_1

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

31.Δίνεται η εξίσωση :

$$C:\frac{x^2}{10+8\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{y^2}{10-8\sigma\upsilon\nu\theta}=1,\ \theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$$

Να βρεθεί τι παριστάνει η C για τις διάφορες τιμές του θ.

Να δείξετε ότι το σημείο $M(|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|,|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|)$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\theta$, ανήκει στην C.

Αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C στο M, να βρεθεί η συγκεκριμένη εξίσωση της C ώστε ο λ^2 να γίνεται μέγιστος.

32.Δίνεται η υπερβολή $C: x^2-3y^2=3$ και το σημείο της $M(3,\sqrt{2})$

Να βρεθεί το συμμετρικό της εστίας Ε της υπερβολής ως προς την εφαπτομένη της υπερβολής στο Μ.

Να δείξετε ότι το συμμετρικό της εστίας Ε βρίσκονται σε κύκλο που έχει κέντρο την άλλη εστία Ε’ και ακτίνα $2\sqrt{3}$.

33.Έστω η έλλειψη $C:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1,\ \alpha>\beta>0$ και το σημείο Κ(0,2β).

Μια μεταβλητή ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σταθερό σημείο Κ και τέμνει της εφαπτομένες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονα της στα σημεία Μ και Ν.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΜΝ ως συνάρτηση του λ

β) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο κύκλος με διάμετρο ΜΝ να διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

34.Έστω η υπερβολή $C: x^2-\psi^2=\alpha^2$ και το σημείο της $M(x_0,\psi_0)$.

Η εφαπτομένη (ε) της υπερβολής στο σημείο Μ τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία Γ και Δ.

Να αποδειχθεί ότι : i) (ΟΔ) (ΟΓ)=$2\alpha^2$ ii) Το Μ είναι μέσο του ΓΔ iii)Εμβ(ΟΓΔ)=α^2

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

35.Αν οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ και $C_2: \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{\psi^2}{\alpha^2}=1 \; \alpha>\beta>0$ τέμνονται σε τέσσερα διαφορετικά σημεία, να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά είναι ομοκυκλικά.

36. Δίνεται η παραβολή $C: \psi^2=4x$ και τα σημεία της $M(t^2,2t),\ P(\mu^2,2\mu),\ t\neq\mu, t\in R^*$. Οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Μ και Ρ τέμνονται στο σημείο Τ. Αν η ευθεία ΜΡ διέρχεται από το σημείο Σ(4,0), να αποδειχθεί ότι :
α) tμ=-4 β) Το Τ κινείται σε σταθερή ευθεία.

37.Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων της έλλειψης $C_1: x^2+2\psi^2=2$ και της παραβολής $C_2: \psi^2=4x$.

38.Έστω η παραβολή $C: \psi^2=4x$ και τα σημεία της $A(t^2,2t),\ B(\mu^2,2\mu)$. Αν η ευθεία ΑΒ σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία $30°$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ της χορδής ΑΒ.

39.Έστω η παραβολή $C: y^2=2px (p>0)$ και η εφαπτομένη της (ε) σ’ ένα σημείο $A(x_1,y_1)$ αυτής, η οποία τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο Β.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α και Β ως συνάρτηση των p και y_1.
β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που γράφεται με διάμετρο την ΑΒ διέρχεται από την εστία της παραβολής.

40.Α. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$
Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη και η εκκεντρότητα της είναι ίση με 2.
Β. Στην υπερβολή $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ θεωρούμε την εφαπτομένη στο τυχαίο σημείο της Μ και την κάθετη στην εφαπτομένη στο

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

σημείο Μ.
Αν η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο p και η κάθετη στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OK}=16$.

41.Να αποδείξετε ότι η παραβολή $C_1: y^2=2px$ και η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1,\ \alpha>\beta$, τέμνονται κάθετα αν και μόνο αν η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$

42.Μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x τέμνει την ισοσκελή υπερβολή $C: x^2-y^2=\alpha^2$ στα σημεία Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος διαμέτρου ΓΔ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής.

43.Δίνεται η παραβολή C: $y^2=4x$ και η ευθεία ε:y=x+2008.
Να βρείτε:
i)την εστία Ε και την διευθετούσα δ της παραβολής
ii)την εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε)
iii)την εξίσωση της έλλειψης της οποίας η μία εστία συμπίπτει με την εστία της παραβολής και έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{1}{2}$
iv) την εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής της οποίας η μία εστία συμπίπτει με την εστία της παραβολής.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ

44.Έστω τα σημεία Α(0,α) ,Ε(0,2α) με α>0 και τα συμμετρικά τους ως προς την αρχή των αξόνων Α΄ και Ε΄ αντίστοιχα. Να βρείτε :
α)i)την εξίσωση του κύκλου (C) με διάμετρο ΑΑ΄ .
ii)ττις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 του κύκλου (C) που διέρχονται από το σημείο Ε και να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.
β)Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 του

κύκλου (C) και οι ασύμπτωτες της υπερβολής με εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ και κορυφές τα σημεία Α και Α΄ σχηματίζουν δυο ζεύγη κάθετων ευθειών.

45.α)Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C που έχει άξονα συμμετρίας τον χ΄χ ,κορυφή την αρχή των αξόνων και διευθετούσα δ=-1.

β)Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της παραβολής C η οποία είναι κάθετη στην ευθεία η:4x+3y+1=0 έχει εξίσωση ε: $y=\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}$.

γ)Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην (ε).

δ)Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής και του κύκλου.

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ